$\boxed{1}$ [2012 京都大]

(1)　$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ。

(2)　$P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする。このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ。

$\boxed{2}$ [1999 京都大]

以下の問いに答えよ．ただし，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$ が無理数であることを用いてもよい．

(1)　有理数 p，q，r について，$p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=0$ ならば，$p=q=r=0$ であることを示せ．

(2)　実数係数の 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ について，$f(1)$，$f(1+\sqrt{2})$，$f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数であることを示せ．

$\boxed{3}$ [2006 京都大]

$Q(x)$ を 2 次式とする。整式 $P(x)$ は $Q(x)$ では割り切れないが，$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるという。このとき，2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解をもつことを示せ。

$\boxed{4}$ [2003 京都大]

多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか.

$\boxed{5}$ [2010 早稲田大]

n を正の整数とする。

(1)　$x>y>0$ とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$x^{n+1}-y^{n+1}>(n+1)(x-y)y^n$$

(2)　$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ と $\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}$ の大小を比較せよ。

$\boxed{6}$ [2009 早稲田大]

正の整数 n に対して，集合 $\{1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\}$ の部分集合 M で条件

$$m\in M \text{ ならば } 2m\notin M$$

を満たすものを考える。このような集合 M に対して M の要素の個数を $g(M)$ とするとき，$g(M)$ のとりうる最大値を $f(n)$ と表す。

(1)　n が 4 の倍数のとき，$f(n)\geqq\dfrac{n}{2}+f\left(\dfrac{n}{4}\right)$ が成り立つことを示せ。

(2)　n が 4 の倍数のとき，$f(n)\leqq\dfrac{n}{2}+f\left(\dfrac{n}{4}\right)$ も成り立つことを示せ。

(3)　$f(3\cdot 2^{125})$ を求めよ。

$\boxed{7}$ [2007 早稲田大]

(1)　$a\geqq1$，$b\geqq1$ のとき，次の不等式が成立することを示せ。

$$\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2-\frac{1}{b^2}\right)\geqq2\left(ab-\frac{1}{ab}\right)$$

(2)　$a\geqq1$，$b\geqq1$，$c\geqq1$ のとき，次の不等式が成立することを示せ。

$$\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)+\left(b^3-\frac{1}{b^3}\right)+\left(c^3-\frac{1}{c^3}\right)\geqq3\left(abc-\frac{1}{abc}\right)$$

$\boxed{8}$ [2007 京都大]

n を 1 以上の整数とするとき，次の 2 つの命題はそれぞれ正しいか。正しいときは証明し，正しくないときはその理由を述べよ。

命題 p : ある n に対して，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ はともに有理数である。

命題 q : すべての n に対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数である。

$\boxed{9}$ [2008 一橋大]

$f(x)=x(4-x)$ とする。$0\leqq a_1\leqq4$ に対して，$a_2=f(a_1)$，$a_3=f(a_2)$ と定める。

(1)　$a_1\neq a_2$，$a_1=a_3$ となるときの a_1 の値をすべて求めよ。

(2)　$0\leqq a_3\leqq\dfrac{20}{9}$ となるような a_1 の値の範囲を求めよ。

$\boxed{10}$ [2014 東京大]

(1)　t を実数の定数とする。実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$$

と定める。このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ。

(2)　(1)の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする。t が $t\geqq-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{11}$ [2005 京都大]

xy 平面上の原点と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分 (両端を含む) を L とする。曲線 $y=x^2+ax+b$ が L と共有点をもつような実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示せよ。

$\boxed{12}$ [1997 東京大]

n を正の整数，a を実数とする．すべての整数 m に対して

$m^2-(a-1)m+\dfrac{n^2}{2n+1}a>0$ が成り立つような a の値の範囲を n を用いて表せ.

$\boxed{13}$ [2010 東京大]

(1)　$0\leqq a<b\leqq1$ とする。閉区間 $[a,\ b]$ で関数 $f(x)$ で x^2 を近似するとき，その誤差は，$|x^2-f(x)|$ の $[a,\ b]$ での最大値で与えられるとする。この誤差が最も小さくなる 1 次関数 $f(x)=cx+d$ を求めよ。また，このときの誤差を与えよ。ただし，c，d は実数とする。

(2)　閉区間 $[0,\ 1]$ をふたつの閉区間 $[0,\ s]$ と $[s,\ 1]$ に分けて，それぞれで x^2 を 1 次関数で近似することを考えよう。ただし，$0<s<1$ である。それぞれの閉区間 $[0,\ s]$ と $[s,\ 1]$ で 1 次関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$ を与えて，それぞれの区間での x^2 の近似の誤差の，大きい方が最も小さくなるようにする。つまり，$|x^2-f_1(x)|$ の $[0,\ s]$ での最大値と，$|x^2-f_2(x)|$ の $[s,\ 1]$ での最大値の大きい方が，最も小さくなるように，s と $f_1(x)$，$f_2(x)$ を選ぶ。このとき，s と $f_1(x)$，$f_2(x)$ を与えよ。

$\boxed{14}$ [2015 九州大]

x，y を 0 以上 1 以下の実数とする。ただし，a，b，c，d が実数のとき，$\max(a,\ b)$ は a，b のうちの最大の数を表し，$\max(a,\ b,\ c,\ d)$ は a，b，c，d のうちの最大の数を表す。

(1)　$\max(xy,\ 1-xy)$ の最小値を求めよ。

(2)　$\max(xy,\ 1-xy,\ x,\ y)$ の最小値を求めよ。

$\boxed{15}$ [2006 九州大]

区間 $[a,\ b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとは，

$$a\leqq x\leqq b \text{ ならば，} a\leqq f(x)\leqq b$$

が成り立つこととする。$f(x)=4x(1-x)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　区間 $[0,\ 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変であることを示せ。

(2)　$0<a<b<1$ とする。このとき，区間 $[a,\ b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではないことを示せ。

$\boxed{16}$ [2009 東京工業大]

N を正の整数とする。$2N$ 以下の正の整数 m，n からなる組 $(m,\ n)$ で，方程式 $x^2-nx+m=0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか。