$\boxed{1}$［2013 東京大］

座標平面上の3点 $P(0,\ -\sqrt{2})$，$Q(0,\ \sqrt{2})$，$A\left(a,\ \sqrt{a^2+1}\right)(0\leqq a\leqq 1)$ を考える。

(1) 2つの線分の長さの差 $PA-AQ$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

(2) Qを端点としAを通る半直線と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点をBとする。点Bから直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点をCとする。このとき，線分の長さの和 $PA+AB+BC$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

$\boxed{2}$［2014 東京大］

座標平面の原点をOで表す。線分 $y=\sqrt{3}\,x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ 上の点Pと，線分 $y=-\sqrt{3}\,x$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ 上の点Qが，線分OPと線分OQの長さの和が6となるように動く。このとき，線分PQの通過する領域を D とする。

(1) s を $0\leqq s\leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。

$\boxed{3}$［2010 東京大］

C を半径1の円周とし，Aを C 上の1点とする。3点P，Q，RがAを時刻 $t=0$ に出発し，C 上をおのおの一定の速さで，P，Qは反時計回りに，Rは時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く。P，Q，Rの速さは，それぞれ m，1，2であるとする。（したがって，Qは C をちょうど1周する。）ただし，m は $1\leqq m\leqq 10$ を満たす整数である。△PQRがPRを斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。

$\boxed{4}$［2010 東京工業大］

a を正の定数とする。原点をOとする座標平面上に定点 $A=A(a,\ 0)$ と，Aと異なる動点 $P=P(x,\ y)$ をとる。次の条件

Aから P に向けた半直線上の点Qに対し，$\dfrac{AQ}{AP}\leqq 2$ ならば $\dfrac{QP}{OQ}\leqq\dfrac{AP}{OA}$

を満たすPからなる領域を D とする。D を図示せよ。

$\boxed{5}$［2007 東京大］

座標平面上の2点P，Qが，曲線 $y=x^2$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分PQを $1:2$ に内分する点Rが動く範囲を D とする。ただし，$P=Q$ のときは $R=P$ とする。

(1) a を $-1\leqq a\leqq 1$ を満たす実数とするとき，点 $(a,\ b)$ が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2) D を図示せよ。

$\boxed{6}$［2006 東京大］

Oを原点とする座標平面上に，y 軸上の点 $P(0,\ p)$ と，直線 $m:y=(\tan\theta)x$ が与えられている。ここで，$p>1$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

いま，傾きが α の直線 ℓ を対称軸とする対称移動を行うと，原点Oは直線 $y=1$ 上の，第1象限の点Qに移り，y 軸上の点Pは直線 m 上の，第1象限の点Rに移った。

(1) このとき，$\tan\theta$ を α と p で表せ。

(2) 次の条件を満たす点Pが存在することを示し，そのときの p の値を求めよ。

条件：どのような $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対しても，原点を通り直線 ℓ に垂直な直線は $y=\left(\tan\dfrac{\theta}{3}\right)x$ となる。

$\boxed{7}$［2005 東京工業大］

実数 x，y が $x^2+y^2\leqq 1$ を満たしながら変化するとする。

(1) $s=x+y$，$t=xy$ とするとき，点 $(s,\ t)$ の動く範囲を st 平面上に図示せよ。

(2) 負でない定数 m をとるとき，$xy+m(x+y)$ の最大値，最小値を m を用いて表せ。

$\boxed{8}$［2015 東京工業大］

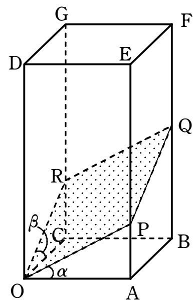
四面体OABCにおいて，$OA=OB=OC=BC=1$，$AB=AC=x$ とする。頂点Oから平面ABCに垂線を下ろし，平面ABCとの交点をHとする。頂点Aから平面OBCに垂線を下ろし，平面OBCとの交点を H' とする。

(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，$\overrightarrow{OH}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$，$\overrightarrow{OH'}=s\vec{b}+t\vec{c}$ と表す。このとき，p，q，r および s，t を x の式で表せ。

(2) 四面体OABCの体積 V を x の式で表せ。また，x が変化するときの V の最大値を求めよ。

$\boxed{9}$［2014 東京大］

1辺の長さが1の正方形を底面とする四角柱OABC−DEFGを考える。3点P，Q，Rを，それぞれ辺AE，辺BF，辺CG上に，4点O，P，Q，Rが同一平面上にあるようにとる。四角形OPQRの面積を S とおく。また，∠AOPを α，∠CORを β とおく。



(1) S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2) $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。さらに，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。

$\boxed{10}$［2012 早稲田大］

平面上に点O，A_1，A_2，A_3，……，A_{100} がある。ただし，同じ点があってもよい。また，平面上の点Pに対して，$f(P)=\displaystyle\sum_{i=1}^{100}\left|\overrightarrow{PA_i}\right|^2$ とする。また，$f(P)$ の最小値を m とし，平面上の点Cは $f(C)=m$ を満たすとする。

(1) $\vec{a_i}=\overrightarrow{OA_i}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ 100)$ とするとき，$\overrightarrow{OC}$ を $\vec{a_i}$ を用いて表せ。

(2) 次の条件

(*) $\displaystyle\sum_{i=1}^{100}\left(\sum_{j=1}^{100}\left|\overrightarrow{A_iA_j}\right|^2\right)=\sum_{j=1}^{100}\left|\overrightarrow{A_1A_j}\right|^2+\sum_{j=1}^{100}\left|\overrightarrow{A_2A_j}\right|^2+\cdots\cdots+\sum_{j=1}^{100}\left|\overrightarrow{A_{100}A_j}\right|^2=4000$

が成立しているときの m の値を求めよ。

(3) (2)における条件(*)が成立しているとき，集合

$\left\{A_i\ \middle|\ \left|\overrightarrow{CA_i}\right|\geqq 2,\ 1\leqq i\leqq 100,\ i\text{ は整数}\right\}$

の要素の個数の最大値を求めよ。

$\boxed{11}$［2010 東京大］

四面体OABCにおいて，4つの面はすべて合同であり，$OA=3$，$OB=\sqrt{7}$，$AB=2$ であるとする。また，3点O，A，Bを含む平面を L とする。

(1) 点Cから平面 L に下ろした垂線の足をHとおく。$\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(2) $0<t<1$ を満たす実数 t に対して，線分OA，OBおのおのを $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t とおく。2点 P_t，Q_t を通り，平面 L に垂直な平面を M とするとき，平面 M による四面体OABCの切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{12}$［2009 東京医科歯科大］

座標平面または座標空間において，座標成分がすべて整数である点を格子点という。

(1) C_1 を座標平面上の半径0.5の円とする。C_1 が内部に格子点を含まないとき，C_1 の中心 $(x,\ y)$ が存在しうる領域を $0\leqq x\leqq 2$，$0\leqq y\leqq 2$ の範囲で図示せよ。ここで C_1 の内部とは，C_1 の中心からの距離が0.5より小さい点全体からなる集合のことである。

(2) C_2 を座標平面上の半径0.75の円とする。C_2 は中心をどのような位置に移動させても必ず内部に格子点を含むことを証明せよ。

(3) S を座標空間内の半径 r の球とする。S は半径を変化させずに中心をどのような位置に移動させても，必ず内部に格子点を含むとする。このとき r のとりうる値の範囲を求めよ。ここで S の内部とは，S の中心からの距離が r より小さい点全体からなる集合のことである。

$\boxed{13}$［2006 東京大］

Oを原点とする座標平面上の4点 P_1，P_2，P_3，P_4 で，条件 $\overrightarrow{OP_{n-1}}+\overrightarrow{OP_{n+1}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OP_n}$ $(n=2,\ 3)$ を満たすものを考える。

(1) P_1，P_2 が曲線 $xy=1$ 上にあるとき，P_3 はこの曲線上にはないことを示せ。

(2) P_1，P_2，P_3 が円周 $x^2+y^2=1$ 上にあるとき，P_4 もこの円周上にあることを示せ。

$\boxed{14}$［2002 東京大］

xyz 空間内の原点 O$(0,\ 0,\ 0)$ を中心とし，点 A$(0,\ 0,\ -1)$ を通る球面を S とする．S の外側にある点 P$(x,\ y,\ z)$ に対し，OP を直径とする球面と S との交わりとして得られる円を含む平面を L とする．点 P と点 A から平面 L へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q，R とする．

このとき，PQ$\leqq$AR であるような点 P の動く範囲 V を求め，V の体積は 10 より小さいことを示せ．

$\boxed{15}$［1999 東京大］

xyz 空間において xy 平面上に円板 A があり xz 平面上に円板 B があって，次の 2 条件を満たしている．

(a)　A，B は原点からの距離が 1 以下の領域に含まれる．

(b)　A，B は 1 点 P のみを共有し，P はそれぞれの円周上にある．

　このような円板 A と B の半径の和の最大値を求めよ．ただし，円板とは円の内部と円周を合わせたものを意味する．