$\boxed{1}$［2017 東京大］

実数 $a$，$b$ に対して $f(\theta)=\cos 3\theta+a\cos 2\theta+b\cos\theta$ とし，$0<\theta<\pi$ で定義された関数 $g(\theta)=\dfrac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta-1}$ を考える。

(1)　$f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x=\cos\theta$ の整式で表せ。

(2)　$g(\theta)$ が $0<\theta<\pi$ の範囲で最小値 0 をとるための $a$，$b$ についての条件を求めよ。
　また，条件を満たす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ。

$\boxed{2}$［2012 京都大］

正四面体 OABC において，点 P，Q，R をそれぞれ辺 OA，OB，OC 上にとる。ただし P，Q，R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする。△PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ，QR，RP はそれぞれ 3 辺 AB，BC，CA に平行であることを証明せよ。

$\boxed{3}$［2012 慶応義塾大］

$xy$ 平面上に原点 O (0, 0) を中心とする円 $C$ と，2 つの直線 $\ell_1$，$\ell_2$ がある。ただし，$a>1$ とする。

円 $C$　：$x^2+y^2=1$

直線 $\ell_1$：$x+\sqrt{2}\,y=\dfrac{\sqrt{3}}{a}$

直線 $\ell_2$：$x+\sqrt{2}\,y=a\sqrt{3}$

円 $C$ と直線 $\ell_1$ は異なる 2 点 A，B で交わり，それぞれの $x$ 座標を $x_A$，$x_B$ とおくと，$x_A<x_B$ である。また，直線 $\ell_2$ 上に，$x$ 座標および $y$ 座標がともに正であるような点 P をとる。三角形 APB において，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とすると，$\cos\theta=\dfrac{1}{a}\sqrt{a^2-1}$ であり，四角形 OAPB の面積は $2\sqrt{6}$ である。

(1)　線分 AB の長さを求めよ。

(2)　$\angle\mathrm{OBP}$ の大きさを $\theta$ を用いて表せ。

(3)　三角形 OBP の面積を求めよ。

$\boxed{4}$［2011 東京工業大］

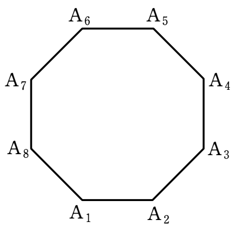
定数 $k$ は $k>1$ を満たすとする。$xy$ 平面上の点 A (1, 0) を通り $x$ 軸に垂直な直線の第 1 象限に含まれる部分を，2 点 X，Y が $\mathrm{AY}=k\mathrm{AX}$ を満たしながら動いている。原点 O (0, 0) を中心とする半径 1 の円と線分 OX，OY が交わる点をそれぞれ P，Q とするとき，△OPQ の面積の最大値を $k$ を用いて表せ。

$\boxed{5}$［2007 東京工業大］

1 辺の長さが 1 の正八角形 $A_1A_2\cdots\cdots A_8$ の周上を 3 点 P，Q，R が動くとする。

(1)　△PQR の面積の最大値を求めよ。

(2)　Q が正八角形の頂点 $A_1$ に一致し，$\angle\mathrm{PQR}=90^\circ$ となるとき，△PQR の面積の最大値を求めよ。




$\boxed{6}$［2006 京都大］

平面上の点 O を中心とし半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A，B，C がある。△ABC の内接円の半径 $r$ は $\dfrac{1}{2}$ 以下であることを示せ。

$\boxed{7}$［2005 東京工業大］

$C$ を半径 1 の円とし，その周上に長さ $\theta$ の円弧 PQ をおく。$C$ と P で接し $C$ の内部にある円を $A$，$C$ と Q で接し $A$ にも接する円を $B$ とする。

(1)　$A$ と $B$ の面積の和の最小値 $S_\theta$ を $\theta$ で表せ。

(2)　$\theta$ が 0 から $2\pi$ まで動くとき，$S_\theta$ の最大値を求めよ。

$\boxed{8}$［2003 慶應義塾大］

関数 $T_1(x)$ を $T_1(x)=1-|2x-1|\ (0\leqq x\leqq 1)$ とし，$T_2(x)=T_1(T_1(x))$，$T_3(x)=T_1(T_2(x))$，…… というように，一般の自然数 $n$ について $T_{n+1}(x)=T_1(T_n(x))$ と定める．

(1)　関数 $y=T_1(x)\ (0\leqq x\leqq 1)$ のグラフをかけ．

(2)　$0<a<1$ とする．連立不等式 $\begin{cases} y\geqq a \\ y\leqq T_2(x)\ \ (0\leqq x\leqq 1)\end{cases}$ の表す領域の面積を $a$ で表せ．

(3)　方程式 $y-T_n(x)=0\ (0\leqq x\leqq 1)$ の表す図形と直線 $y=x$ の共有点の $x$ 座標の最大値が $1-\left(\dfrac{1}{10}\right)^{10}$ より大きくなるような自然数 $n$ の最小値を求めよ．
　ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする．

$\boxed{9}$［1999 東京工業大］

3 辺の長さが 1，1，$a$ である三角形の面積を，周上の 2 点を結ぶ線分で 2 等分する．それらの線分の長さの最小値を $a$ を用いて表せ．

$\boxed{10}$［2001 東京工業大］

1 辺の長さが 1 の正方形の紙を 1 本の線分に沿って折り曲げたとき二重になる部分の多角形を $P$ とする．$P$ が線対称な五角形になるように折るとき，$P$ の面積の最小値を求めよ．

$\boxed{11}$［2004 早稲田大］

$\log_{10}2=0.3010$ とするとき

(1)　次の式を満たす整数 $k$ の値を求めよ．

$$10^4<2^k<2\cdot 10^4$$

(2)　2004 個の 2 の累乗，$2^1$，$2^2$，$2^3$，…，$2^{2004}$ のうち，10 進法で表したとき，その最高位の数字が 1 であるものの個数を求めよ．

$\boxed{12}$［2012 京都大］

実数 $x$，$y$ が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき
$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$ がとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{13}$［2015 東京大］

座標平面上の 2 点 A (−1, 1)，B (1, −1) を考える。また，P を座標平面上の点とし，その $x$ 座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件 (i) または (ii) を満たす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

(i)　頂点の $x$ 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで，点 A，P，B をすべて通るものがある。

(ii)　点 A，P，B は同一直線上にある。

$\boxed{14}$［2010 東京大］

3 辺の長さが $a$ と $b$ と $c$ の直方体を，長さが $b$ の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体が作る立体を $V$ とする。

(1)　$V$ の体積を $a$，$b$，$c$ を用いて表せ。

(2)　$a+b+c=1$ のとき，$V$ の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{15}$［2006 東京大］

$\theta$ は，$0^\circ<\theta<45^\circ$ の範囲の角度を表す定数とする。$-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で，関数 $f(x)=|x+1|^3+|x-\cos 2\theta|^3+|x-1|^3$ が最小値をとるときの変数 $x$ の値を，$\cos\theta$ で表せ。

$\boxed{16}$［2003 東京工業大］

(1)　3 次関数 $y=-x^3+ax^2+bx\ (a>0)$ のグラフを $C$ とする．原点を通る直線で，$C$ とちょうど 2 点を共有するものを 2 本求めよ．

(2)　(1) で求めた直線のうち，傾きの大きい方を $l_1$，小さい方を $l_2$ とする．$C$ と $l_1$ で囲まれる部分の面積を $S_1$，$C$ と $l_2$ で囲まれる部分の面積を $S_2$ とおく．この 2 つの面積の比 $S_1:S_2$ を求めよ．

$\boxed{17}$［2004 東京大］

関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を次のように定める．

$f_1(x)=x^3-3x$，$f_2(x)=\{f_1(x)\}^3-3f_1(x)$，$f_3(x)=\{f_2(x)\}^3-3f_2(x)$

以下同様に，$n\geqq 3$ に対して関数 $f_n(x)$ が定まったならば，関数 $f_{n+1}(x)$ を

$f_{n+1}(x)=\{f_n(x)\}^3-3f_n(x)$ で定める．

(1)　$a$ を実数とする．$f_1(x)=a$ を満たす実数 $x$ の個数を求めよ．

(2)　$a$ を実数とする．$f_2(x)=a$ を満たす実数 $x$ の個数を求めよ．

(3)　$n$ を 3 以上の自然数とする．$f_n(x)=0$ を満たす実数 $x$ の個数は $3^n$ であることを示せ．