数学ⅠAⅡB　MASTER　4章　数列

$\boxed{1}$ [2017 東京大]

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して $a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。

(1)　$a_1,\ a_2$ の値を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ とする。積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

(4)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

$\boxed{2}$ [2015 東京大]

どの目も出る確率が $\dfrac{1}{6}$ のさいころを1つ用意し，次のように左から順に文字を書く。さいころを投げ，出た目が1，2，3のときは文字列AAを書き，4のときは文字Bを，5のときは文字Cを，6のときは文字Dを書く。更に繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA，B，C，Dをすでにある文字列の右側につなげて書いていく。例えば，さいころを5回投げ，その出た目が順に2，5，6，3，4であったとすると，得られる文字列は，AACDAABとなる。このとき，左から4番目の文字はD，5番目の文字はAである。

(1)　n を正の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字がAとなる確率を求めよ。

(2)　n を2以上の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字がAで，かつ n 番目の文字がBとなる確率を求めよ。

$\boxed{3}$ [2015 京都大]

2つの関数を $f_0(x)=\dfrac{x}{2}$，$f_1(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく。$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $x_n=f_1(x_{n-1})$ と定める。

このとき，$x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ。

$\boxed{4}$ [2015 東京大]

数列 $\{p_n\}$ を次のように定める。

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　$\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ。

(2)　すべての $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots$ に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ。

(3)　数列 $\{q_n\}$ を次のように定める。

$$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ を示せ。

$\boxed{5}$ [2014 東京工業大]

3以上の奇数 n に対して，a_n と b_n を次のように定める。

$$a_n=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1),\quad b_n=\frac{n^2-1}{8}$$

(1)　a_n と b_n はどちらも整数であることを示せ。

(2)　a_n-b_n は4の倍数であることを示せ。

$\boxed{6}$ [2014 東京大]

r を0以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1=r,\ a_2=r+1,\ a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

また，素数 p を1つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0を p で割った余りは0とする。

(1)　自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2)　$r=2$，$p=17$ の場合に，10以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3)　ある2つの相異なる自然数 n，m に対して，$b_{n+1}=b_{m+1}>0$，$b_{n+2}=b_{m+2}$ が成り立ったとする。このとき，$b_n=b_m$ が成り立つことを示せ。

(4)　$a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots\cdots$ に p で割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ。

$\boxed{7}$ [2014 東京医科歯科大]

自然数 n に対し，3個の数字1，2，3から重複を許して n 個並べたもの $(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$ の全体の集合を S_n とおく。S_n の要素 $(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$ に対し，次の2つの条件を考える。

条件 C_{12}：$1\leqq i<j\leqq n$ である整数 i，j の組で，$x_i=1$，$x_j=2$ を満たすものが少なくとも1つ存在する。

条件 C_{123}：$1\leqq i<j<k\leqq n$ である整数 i，j，k の組で，$x_i=1$，$x_j=2$，$x_k=3$ を満たすものが少なくとも1つ存在する。

例えば，S_4 の要素 $(3,\ 1,\ 2,\ 2)$ は条件 C_{12} を満たすが，条件 C_{123} は満たさない。

S_n の要素 $(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n)$ のうち，条件 C_{12} を満たさないものの個数を $f(n)$，条件 C_{123} を満たさないものの個数を $g(n)$ とおく。

(1)　$f(4)$ と $g(4)$ を求めよ。

(2)　$f(n)$ を n を用いて表せ。

(3)　$g(n+1)$ を $g(n)$ と $f(n)$ を用いて表せ。

(4)　$g(n)$ を n を用いて表せ。

$\boxed{8}$ [2013 東京工業大]

2次方程式 $x^2-3x+5=0$ の2つの解 α，β に対し，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ はすべての正の整数 n について5の整数倍になることを示せ。

$\boxed{9}$ [2012 東京工業大]

$\log_{10}3=0.4771$ として，$\displaystyle\sum_{n=0}^{99}3^n$ の桁数を求めよ。

$\boxed{10}$ [2010 京都大]

(1)　n を正の整数，$a=2^n$ とする。3^a-1 は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ。

(2)　m を正の偶数とする。3^m-1 が 2^m で割り切れるならば $m=2$ または $m=4$ であることを示せ。

$\boxed{11}$ [1996 京都大]

与えられた自然数 k に対し，数列 $\{a_n\}$ を $a_1=0,\ a_n=\left[\dfrac{a_{n-1}+k}{3}\right]\ (n\geqq 2)$ によって定める．ただし，実数 t に対し $[t]$ は t を超えない最大の整数を表す．

(1)　$k=8$ および $k=9$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ．

(2)　すべての自然数 n に対し，不等式 $a_n\leqq\dfrac{k-1}{2},\ a_n\leqq a_{n+1}$ が成り立つことを示せ．

(3)　$a_n=a_{n+1}$ ならば，n 以上のすべての整数 m に対し $a_n=a_m$ であることを示し，このときの a_n の値を求めよ．

$\boxed{12}$ [2009 東京大]

自然数 $m\geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1,\ {}_m\mathrm{C}_2,\ \cdots\cdots,\ {}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1)　m が素数ならば，$d_m=m$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 k に対し，k^m-k が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法によって示せ。

(3)　m が偶数のとき d_m は1または2であることを示せ。

$\boxed{13}$［2008 東京工業大］

⑴　実数 a_1，a_2，x_1，x_2，y_1，y_2 が

$$0<a_1\leqq a_2$$
$$a_1x_1\leqq a_1y_1$$
$$a_1x_1+a_2x_2\leqq a_1y_1+a_2y_2$$

を満たしているとする。このとき $x_1+x_2\leqq y_1+y_2$ であることを証明せよ。

⑵　n を 2 以上の整数とし，$3n$ 個の実数

a_1，a_2，……，a_n，x_1，x_2，……，x_n，y_1，y_2，……，y_n

が　$0<a_1\leqq a_2\leqq\cdots\cdots\leqq a_n$

および n 個の不等式　$\displaystyle\sum_{i=1}^{j}a_ix_i\leqq\sum_{i=1}^{j}a_iy_i$ $(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$

を満たしているならば，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\leqq\sum_{i=1}^{n}y_i$ であることを証明せよ。

$\boxed{14}$［2006 東京大］

次の条件を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ を考える。

条件(A)：x，y，z は正の整数で，$x^2+y^2+z^2=xyz$ および $x\leqq y\leqq z$ を満たす。

⑴　条件(A)を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ で，$y\leqq 3$ となるものをすべて求めよ。

⑵　組 $(a,\ b,\ c)$ が条件(A)を満たすとする。このとき，組 $(b,\ c,\ z)$ が条件(A)を満たすような z が存在することを示せ。

⑶　条件(A)を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は，無数に存在することを示せ。

$\boxed{15}$［2003 東京大］

2 次方程式 $x^2-4x-1=0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする．$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対し，$s_n=\alpha^n+\beta^n$ とおく．

⑴　s_1，s_2，s_3 を求めよ．また，$n\geqq 3$ に対し，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ．

⑵　β^3 以下の最大の整数を求めよ．

⑶　α^{2003} 以下の最大の整数の一の位の数を求めよ．