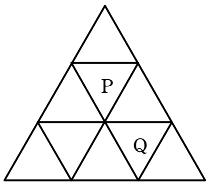
$\boxed{1}$ [2000 東京大]

正四面体の各頂点を A_1，A_2，A_3，A_4 とする．ある頂点にいる動点 X は，同じ頂点にとどまることなく，1 秒ごとに他の 3 つの頂点に同じ確率で移動する．X が A_i に n 秒後に存在する確率を $P_i(n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で表す．

$P_1(0)=\dfrac{1}{4}$，$P_2(0)=\dfrac{1}{2}$，$P_3(0)=\dfrac{1}{8}$，$P_4(0)=\dfrac{1}{8}$ とするとき，$P_1(n)$ と $P_2(n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を求めよ．

$\boxed{2}$ [2012 東京大]

図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P，Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。



$\boxed{3}$ [2015 東京医科歯科大]

n を自然数，m を $2n$ 以下の自然数とする。1 から n までの自然数が 1 つずつ記されたカードが，それぞれの数に対して 2 枚ずつ，合計 $2n$ 枚ある。この中から，m 枚のカードを無作為に選んだとき，それらに記された数がすべて異なる確率を $P_n(m)$ と表す。ただし $P_n(1)=1$ とする。更に，$E_n(m)=mP_n(m)$ とおく。

(1)　$P_3(2)$，$P_3(3)$，$P_3(4)$ を求めよ。

(2)　$E_{10}(m)$ が最大となるような m を求めよ。

(3)　自然数 n に対し，$E_n(m)>E_n(m+1)$ を満たす自然数 m の最小値を $f(n)$ とするとき，$f(n)$ を n を用いて表せ。ただし，ガウス記号 [　] を用いてよい。ここで，実数 x に対して，x を超えない最大の整数を $[x]$ と表す。

$\boxed{4}$ [2013 東京工業大]

6 個のさいころを同時に投げるとき，ちょうど 4 種類の目が出る確率を既約分数で表せ。

$\boxed{5}$ [2013 東京大]

A，B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(a)　A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

(b)　B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして A，B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。例えば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

A，B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

$\boxed{6}$ [2010 東京工業大]

1 から n までの数字がもれなく 1 つずつ書かれた n 枚のカードの束から同時に 2 枚のカードを引く。このとき，引いたカードの数字のうち小さい方が 3 の倍数である確率を $p(n)$ とする。

(1)　$p(8)$ を求めよ。

(2)　正の整数 k に対し，$p(3k+2)$ を k で表せ。

$\boxed{7}$ [2010 東京大]

2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\dfrac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作 (#) を繰り返す。

(#)　箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，$0\leqq z\leqq 15$ のとき $K(z)=z$，$16\leqq z\leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。

例えば，$P_1(15)=P_2(15)=\dfrac{1}{2}$ となる。

(1)　$m\geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2)　n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。

(3)　n を自然数とするとき，$P_{4n}(6)$ を求めよ。

$\boxed{8}$ [2009 東京大]

スイッチを 1 回押すごとに，赤，青，黄，白のいずれかの色の玉が 1 個，等確率 $\dfrac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

(A)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を L に入れる。

(B)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を R に入れる。

(C)　1 回スイッチを押し，出てきた玉と同じ色の玉が，L になければその玉を L に入れ，L にあればその玉を R に入れる。

(1)　L と R は空であるとする。操作 (A) を 5 回行い，さらに操作 (B) を 5 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2)　L と R は空であるとする。操作 (C) を 5 回行う。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3)　L と R は空であるとする。操作 (C) を 10 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。$\dfrac{P_3}{P_1}$ を求めよ。

$\boxed{9}$ [2008 東京工業大]

いびつなさいころがあり，1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ とは限らないとする。このさいころを 2 回振ったとき同じ目が出る確率を P とし，1 回目に奇数，2 回目に偶数の目が出る確率を Q とする。

(1)　$P\geqq\dfrac{1}{6}$ であることを示せ。また，等号が成立するための必要十分条件を求めよ。

(2)　$\dfrac{1}{4}\geqq Q\geqq\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}P$ であることを示せ。

$\boxed{10}$ [2007 東京工業大]

1 から 6 までの目がそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るサイコロを 3 回振って出た目を順に n_1，n_2，n_3 とし，次の 3 次方程式を考える。

$$x^3-n_1x+(-1)^{n_2}n_3=0$$

(1)　この方程式が相異なる 3 個の実数解をもつ確率を求めよ。

(2)　この方程式が自然数の解をもつ確率を求めよ。

$\boxed{11}$ [2006 東京大]

コンピュータの画面に，記号 ○ と × のいずれかを表示させる操作を繰り返し行う。このとき，各操作で，直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は，それまでの経過に関係なく，p であるとする。

最初に，コンピュータの画面に記号 × が表示された。操作を繰り返し行い，記号 × が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に，記号 ○ が n 個出る確率を P_n とする。ただし，記号 ○ が n 個出た段階で操作は終了する。

(1)　P_2 を p で表せ。

(2)　$n\geqq 3$ のとき，P_n を p と n で表せ。

$\boxed{12}$ [2004 東京工業大]

3 枚のコイン P，Q，R がある．P，Q，R の表の出る確率をそれぞれ p，q，r とする．このとき次の操作を n 回繰り返す．まず，P を投げて表が出れば Q を，裏が出れば R を選ぶ．次にその選んだコインを投げて，表が出れば赤玉を，裏が出れば白玉をつぼの中に入れる．

(1)　n 回ともコイン Q を選び，つぼの中には k 個の赤玉が入っている確率を求めよ．

(2)　つぼの中が赤玉だけとなる確率を求めよ．

(3)　$n=2004$，$p=\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{1}{2}$，$r=\dfrac{1}{5}$ のとき，つぼの中に何個の赤玉が入っていることがもっとも起こりやすいかを求めよ．

$\boxed{13}$［2004 東京大］

片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある．この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作を繰り返し行う．

　さいころを振り，出た目が 1，2 であれば左端の板を裏返し，3，4 であればまん中の板を裏返し，5，6 であれば右端の板を裏返す．

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる．更に，2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる．

(1)　「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ．

(2)　「白白白」から始めて，n 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率を p_n とする．

p_{2k+1} (k は自然数) を求めよ．

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．

$\boxed{14}$［2001 東京工業大］

箱の中に 1 から N までの番号が 1 つずつ書かれた N 枚のカードが入っている．この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して戻すという試行を k 回行う．このとき，初めから j 回目 ($j=1$，……，k) までに取り出したカードの番号の和を X_j とし，X_1，……，X_k のうちのどれかが k となる確率を $P_N(k)$ とする．

(1)　$N \geqq 3$ のとき $P_N(1)$，$P_N(2)$，$P_N(3)$ を N で表せ．

(2)　$P_3(4)$，$P_3(5)$ を求めよ．

(3)　$k \leqq N$ のとき，$P_N(k)$ を N と k で表せ．

$\boxed{15}$［1996 東京大］

n を正の整数とし，n 個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える．ただし，1 個のボールも入らない箱があってもよいものとする．次に述べる 4 つの場合について，それぞれ相異なる入れ方の総数を求めたい．

(1)　1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．

(2)　互いに区別のつかない n 個のボールを，A，B，C と区別された 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．

(3)　1 から n まで異なる番号のついた n 個のボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．

(4)　n が 6 の倍数 $6m$ であるとき，n 個の互いに区別のつかないボールを，区別のつかない 3 つの箱に入れる場合，その入れ方は全部で何通りあるか．