$\boxed{1}$［2005 東京大］

3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

$\boxed{2}$［2004 東京大］

自然数の 2 乗になる数を平方数という．

(1)　10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し，十の位の数を a，一の位の数を b とおいたとき，$a+b$ が偶数となるならば，b は 0 または 4 であることを示せ．

(2)　10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し，千の位の数，百の位の数，十の位の数，および一の位の数の 4 つすべてが同じ数となるならば，その平方数は 10000 で割り切れることを示せ．

$\boxed{3}$［2017 東京工業大］

次の条件 (A)，(B) をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ。

(A)　N の正の約数は 12 個。

(B)　N の正の約数を小さい方から順に並べたとき，7 番目の数は 12。

ただし，N の約数には 1 と N も含める。

$\boxed{4}$［2014 京都大］

自然数 a，b はどちらも 3 で割り切れないが，a^3+b^3 は 81 で割り切れる。このような a，b の組 $(a,\ b)$ のうち，a^2+b^2 の値を最小にするものと，そのときの a^2+b^2 の値を求めよ。

$\boxed{5}$［2013 京都大］

n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする。

(1)　a と b は整数であることを示せ。

(2)　a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ。

$\boxed{6}$［2013 東京大］

次の命題 P を証明したい。

命題 P　次の条件 (a)，(b) をともに満たす自然数 (1 以上の整数) A が存在する。

(a)　A は連続する 3 つの自然数の積である。

(b)　A を 10 進法で表したとき，1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

(1)　y を自然数とする。このとき不等式

$$x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

(2)　命題 P を証明せよ。

$\boxed{7}$［2012 東京工業大］

実数 a に対して，a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。10000 以下の正の整数 n で $[\sqrt{n}]$ が n の約数となるものは何個あるか。

$\boxed{8}$［2012 東京大］

n を 2 以上の整数とする。自然数 (1 以上の整数) の n 乗になる数を n 乗数とよぶことにする。

(1)　連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(2)　連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

$\boxed{9}$［1999 京都大］

自然数 a，b，c について，等式 $a^2+b^2=c^2$ が成り立ち，かつ a，b は互いに素とする．このとき，次のことを証明せよ．

(1)　a が奇数ならば，b は偶数であり，したがって，c は奇数である．

(2)　a が奇数のとき，$a+c=2d^2$ となる自然数 d が存在する．

$\boxed{10}$［2008 早稲田大］

自然数 m，n に対して $f(m,\ n)$ を

$$f(m,\ n)=\frac{1}{2}\{(m+n-1)^2+(m-n+1)\}$$

で定める。

(1)　$f(m,\ n)=100$ を満たす m，n を 1 組求めよ。

(2)　a，b，c，d は整数で，等式 $a^2+b=c^2+d$ を満たすとする。不等式 $-a<b\leqq a$，$-c<d\leqq c$ が成り立つならば，$a=c$，$b=d$ となることを示せ。

(3)　任意の自然数 k に対し，$f(m,\ n)=k$ を満たす m，n がただ 1 組だけ存在することを示せ。

$\boxed{11}$［2007 東京工業大］

p を素数，n を 0 以上の整数とする。

(1)　m は整数で $0\leqq m\leqq n$ とする。1 から p^{n+1} までの整数の中で，p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないものの個数を求めよ。

(2)　1 から p^{n+1} までの 2 つの整数 x，y に対し，その積 xy が p^{n+1} で割り切れるような組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

$\boxed{12}$［2006 慶応義塾大］

整数 p，q，r，α，β に対し，x，y についての連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+py=\alpha \\ qx+ry=\beta \end{cases}$ を考える。

以下では，$r-pq\neq 0$ とする。

(1)　解 x，y を p，q，r，α，β を用いて表せ。

(2)　整数 p，q，r に関する条件 $|r-pq|=1$ は，任意の整数 α，β に対し解 x，y が整数であるための必要十分条件であることを証明せよ。

(3)　$|r-pq|=1$ のとき，$(\alpha,\ \beta)=(1,\ 2)$ に対する解の x の値が 2 となるような整数の組 $(p,\ q,\ r)$ をすべて求めよ。

$\boxed{13}$［2006 東京工業大］

自然数 a，b，c が $3a=b^3$，$5a=c^2$ を満たし，d^6 が a を割り切るような自然数 d は $d=1$ に限るとする。

(1)　a は 3 と 5 で割り切れることを示せ。

(2)　a の素因数は 3 と 5 以外にないことを示せ。

(3)　a を求めよ。