1 [2017 同志社大]

3辺の長さが $\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ である $\triangle\mathrm{ABC}$ の内心を I とする。直線 AI と辺 BC との交点を P，直線 BI と辺 CA との交点を Q，直線 CI と辺 AB との交点を R とする。

(1) BP の長さを a，b，c を用いて表せ。

(2) $\dfrac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AP}}$ を a，b，c を用いて表せ。

(3) $\dfrac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AP}}\cdot\dfrac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BQ}}\cdot\dfrac{\mathrm{CI}}{\mathrm{CR}}$ を a，b，c を用いて表せ。

(4) $a+b+c=1$ のとき，$\dfrac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AP}}\cdot\dfrac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BQ}}\cdot\dfrac{\mathrm{CI}}{\mathrm{CR}}$ の最大値を求めよ。

2 [2014 岐阜大]

(1) a，$b>0$ とする。このとき $\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ であることを証明せよ。また，等号が成立するのは $a=b$ の場合だけであることを示せ。

(2) a，b，$c>0$ とする。このとき $(a+b)(b+c)(c+a)\geqq 8abc$ であることを証明せよ。また，等号が成立するのはどのような場合か述べよ。

(3) α，β，γ を三角形の3辺の長さとする。このとき $\alpha\beta\gamma\geqq(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$ であることを証明せよ。また，等号が成立するのは正三角形の場合だけであることを示せ。

(4) α，β，γ を三角形の3辺の長さとする。このとき
$\dfrac{\alpha}{-\alpha+\beta+\gamma}+\dfrac{\beta}{\alpha-\beta+\gamma}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}\geqq 3$ であることを証明せよ。また，等号が成立するのは正三角形の場合だけであることを示せ。

3 [2013 滋賀医科大]

平面上で2つの円 S，S' が点 P で内接している。ただし S' が S より小さいとする。円 S，S' の中心をそれぞれ O，O′ とおく。円 S' 上にあって直線 PO′ 上にはない点 Q をとる。直線 PQ と円 S との P とは異なる交点を A，直線 AO と円 S との A とは異なる交点を B，直線 BO′ と円 S との B とは異なる交点を C，直線 CQ と円 S との C とは異なる交点を D とする。

(1) AO∥QO′ を示せ。

(2) DB＝BP を示せ。

4 [2012 京都大]

次の命題 (p)，(q) のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ。

(p) 正 n 角形の頂点から3点を選んで内角の1つが 60° である三角形をつくることができるならば，n は3の倍数である。

(q) $\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{ABD}$ において，$\mathrm{AC}<\mathrm{AD}$ かつ $\mathrm{BC}<\mathrm{BD}$ ならば，$\angle\mathrm{C}>\angle\mathrm{D}$ である。

5 [2011 立命館大]

平面上で合同な正 n 角形 m 個を，1点の周りに隙間なく重なりもなく敷き詰めることができたとする。このとき，$\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}=$ ア$\boxed{\quad}$ であり，この式を満たす $(n,\ m)$ の組は，
(イ$\boxed{\quad}$，ウ$\boxed{\quad}$)，(エ$\boxed{\quad}$，オ$\boxed{\quad}$)，(カ$\boxed{\quad}$，キ$\boxed{\quad}$) である。ただし，
イ$\boxed{\quad}$ ＜ エ$\boxed{\quad}$ ＜ カ$\boxed{\quad}$ とする。

6 [2011 西南学院大]

(1) 点 R と線分 AB に関して，次の2つの条件 p と q は同値であることを証明せよ。

p：点 R は線分 AB の垂直二等分線上にある。

q：RA＝RB

(2) (1) の結果を用いて，三角形の3辺の垂直二等分線は1点で交わることを証明せよ。

(3) 三角形 ABC において重心と外心が同じ点であるとき，三角形 ABC は正三角形であることを証明せよ。(ただし，三角形の重心とは，三角形の3つの中線の交点のことである。)

7 [2011 大阪教育大]

平行四辺形 OABC は

$\mathrm{OA}=\mathrm{BC}=1$，$\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=r$，$\angle\mathrm{AOC}=\theta$

を満たす。ただし，$r>0$ かつ $0^\circ<\theta<180^\circ$ とする。

(1) $\mathrm{OB}^2+\mathrm{AC}^2$ は θ の値によらず一定であることを示し，その値を r を用いて表せ。

(2) θ が $0^\circ<\theta<180^\circ$ の範囲を動くとき，OB＋AC の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

8 [2011 東京理科大]

面積が1である $\triangle\mathrm{OAB}$ の辺 OA 上に点 M，辺 OB 上に点 N をとり，線分 AN と線分 BM の交点を P として $\triangle\mathrm{PMN}$ の面積について考える。$\triangle\mathrm{OMN}$ の面積が $\dfrac{1}{3}$ のとき，

$s=\dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{OA}}$ として，以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{PMN}$ の面積は ア$\boxed{\quad}$ － イ$\boxed{\quad}$ s － ウ$\boxed{\quad}$ $\cdot\dfrac{1}{s}$ である。

(2) $\triangle\mathrm{OMN}$ の面積が $\dfrac{1}{3}$ という条件を満たしながら，M，N が動くとき，$\triangle\mathrm{PMN}$ の面積が最大になるのは $s=$ エ$\boxed{\quad}$ のときである。

9 [2009 愛知工業大]

長さ3の線分 AB を直径とする円周上に，2点 C，D があり，線分 AC と線分 BD は円の内部の点 P で交わるとする。AD＝2，BC＝1 のとき，AP，CD を求めよ。

10 [2009 宮崎大]

(1) 図1のように，直線 AD と BC は点 P で交わっている。

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PD}=\mathrm{PB}\cdot\mathrm{PC}$$

が成り立つとき，四角形 ABCD は円に内接することを示せ。

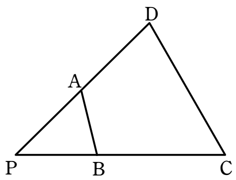

図1

(2) 図2のように，鋭角三角形 ABC の内部に点 P をとり，直線 AP，BP，CP と，辺 BC，CA，AB との交点をそれぞれ D，E，F とする。
次の (A)，(B) がともに成り立つとき，点 P は $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心であることを示せ。

(A) 四角形 AFPE は円に内接する。

(B) 四角形 CEPD は円に内接する。

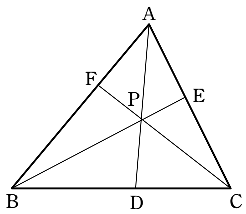

図2

11 [2008 名古屋市立大]

正の数 x に対して，3辺の長さが $\mathrm{AB}=x+1$，$\mathrm{BC}=\sqrt{x^2+x+1}$，$\mathrm{CA}=k\sqrt{x}$ で与えられる三角形 ABC を考える。

(1) $x=2$ のとき，三角形 ABC が存在するような k の値の範囲を求めよ。

(2) 任意の正の数 t に対して不等式

$$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}\geqq 2+\sqrt{3}\quad\cdots\cdots ①$$

および

$$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}-\sqrt{t+\frac{1}{t}+1}\leqq 2-\sqrt{3}\quad\cdots\cdots ②$$

が成立することを示せ。ただし，② を証明する際に ① を利用してよい。

(3) (2) の結果を利用して，任意の正の数 x に対して三角形 ABC が存在するような k の値の範囲を求めよ。

12 [2004 愛知教育大]

直線 l 上に3点 A，B，C をこの順にとり，線分 AB を直径とする円を O とする．C を通る直線 $m(\neq l)$ を円 O の円周と2点で交わるように引き，C に近い交点を B′ とし，他の交点を A′ とする．直線 AA′ と直線 BB′ の交点を P とし，直線 AB′ と直線 BA′ の交点を Q，直線 PQ と l の交点を R とする．

(1) $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}$ が成り立つことを証明せよ．

(2) 直線 PR は l に垂直であることを証明せよ．

(3) 直線 m が上の条件を満たしながら動くときの，点 P の軌跡を求めよ．

13 [2017 札幌医科大]

座標空間において，xy 平面上に原点を中心とする半径1の円に内接する正六角形 ABCDEF がある。六角錐 P－ABCDEF において，頂点 P の座標を $\mathrm{P}(0,\ 0,\ a)\ (a>0)$ とする。$\angle\mathrm{APB}=45^\circ$ であるとき，a の値と，六角錐 P－ABCDEF の体積をそれぞれ求めよ。