 Copyright Makeage,Inc. All Rithts Reserved.

$\boxed{1}$ [2017 名古屋大]

n を自然数とする。0 でない複素数からなる集合 M が次の条件 (Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ) を満たしている。

(Ⅰ) 集合 M は n 個の要素からなる。

(Ⅱ) 集合 M の要素 z に対して, $\dfrac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である。

(Ⅲ) 集合 M の要素 z, w に対して, その積 zw は集合 M の要素である。ただし, $z=w$ の場合も含める。

(1) 1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ。

(2) n は偶数であることを示せ。

(3) $n=4$ のとき, 集合 M は一通りに定まることを示し, その要素をすべて求めよ。

(4) $n=6$ のとき, 集合 M は一通りに定まることを示し, その要素をすべて求めよ。

$\boxed{2}$ [2012 旭川医科大]

正の奇数 p に対して, 3 つの自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ で, $x^2+4yz=p$ を満たすもの全体の集合を S とおく。すなわち

$$S=\{(x,\ y,\ z) \mid x,\ y,\ z \text{ は自然数},\ x^2+4yz=p\}$$

(1) S が空集合でないための必要十分条件は, $p=4k+1$ (k は自然数) とかけることであることを示せ。

(2) S の要素の個数が奇数ならば S の要素 $(x,\ y,\ z)$ で $y=z$ となるものが存在することを示せ。

$\boxed{3}$ [2009 大阪大]

(1) $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

(2) a, b を有理数とする。多項式 $f(x)=x^2+ax+b$ が $f(1+\sqrt{3})=0$ を満たすとき, a, b を求めよ。

(3) n を 2 以上の自然数とする。$g(x)$ は有理数を係数とする n 次多項式で最高次の係数が 1 であるとする。$g(1+\sqrt{3})=0$ となるとき, $g(1-\sqrt{3})=0$ を示せ。

$\boxed{4}$ [2009 大阪大]

α を 2 次方程式 $x^2-2x-1=0$ の解とするとき, $(a+5\alpha)(b+5c\alpha)=1$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。ただし, 必要ならば $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明せずに用いてよい。

$\boxed{5}$ [2009 千葉大]

(1) 5 以上の素数は, ある自然数 n を用いて $6n+1$ または $6n-1$ の形で表されることを示せ。

(2) N を自然数とする。$6N-1$ は, $6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数を約数にもつことを示せ。

(3) $6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数は無限に多く存在することを示せ。

$\boxed{6}$ [2009 大分大]

実数 x に対して, $[x]$ は x 以下の最大の整数を表すものとする。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{10}\right]=238$ を満たす正の整数 n の値を求めよ。

(2) 正の整数 n に対して $\left[\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{2}\right]-\left[\sqrt{n}+\dfrac{1}{2}\right]$ の値を求めよ。

$\boxed{7}$ [1999 京都大]

a, b を整数, u, v を有理数とする. $u+v\sqrt{3}$ が $x^2+ax+b=0$ の解であるならば, u と v はともに整数であることを示せ. ただし, $\sqrt{3}$ が無理数であることを用いてもよい.