

1 [2009 慶応義塾大]

座標平面上の点 $(x,\ y)$ が $x^2-2xy+2y^2=4$ を満たして動くとき

(1) $x+y$ の最大値を求めよ。 (2) $\dfrac{x}{y+4}$ の最大値を求めよ。

2 [2012 東京大]

座標平面上の点 $(x,\ y)$ が次の方程式を満たす。

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき，x のとりうる最大の値を求めよ。

3 [2017 東京理科大]

x の 2 次方程式 $x^2+(a+1)x+a^2+a-1=0$ が実数解をもつような実数 a の値の範囲は

$\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}} \leqq a \leqq \boxed{ウ}$ である。

a がこの範囲の値をとるとき，上の 2 次方程式の解 x がとりうる値の範囲は

$\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}} \leqq x \leqq \boxed{カ}$ である。方程式 $x^2+(a+1)x+a^2+a-1=0$ を満たす整数の組

$(x,\ a)$ は全部で $\boxed{キ}$ 個ある。

4 [2015 慶応義塾大]

2 つの関数 $f(x)=\left|x^2+3bx-\dfrac{b}{4}\right|$，$g(x)=x^2+3b|x|-\dfrac{b}{4}$ の最小値が一致するような b の範囲は $\boxed{}$ である。

5 [2013 京都大]

a を 2 以上の実数とし，$f(x)=(x+a)(x+2)$ とする。このとき $f(f(x))>0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ。

6 [2017 北海道大]

a，b を実数とし，放物線 $y=(x-a)^2+b$ を Q とおく。また，直線 $y=x-1$ を ℓ とおく。Q と ℓ は共有点をもたないか，あるいは 1 点で接しているとする。

(1) a，b の満たす条件を求めよ。

(2) Q 上の点のうち ℓ までの距離が最小となるものを A とおく。また，Q 上の点 B における Q の接線は，点 C において ℓ と垂直に交わっているとする。このとき，3 点 A，B，C の座標を a，b を用いて表せ。

(3) a，b が更に条件 $a\geqq 0$，$b\leqq 2$，$b\leqq 2a+1$ を満たすとき，(2) で求めた 3 点を頂点とする $\triangle$ABC の面積の最大値と最小値を求めよ。

7 [2005 東京大]

0 以上の実数 s，t が $s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，方程式

$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$ の解のとる値の範囲を求めよ。

8 [2011 東京理科大]

実数 a，b $(b\geqq 0)$ に対し，x の 2 次式 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x)=x^2+bx+a^2,$$
$$g(x)=x^2+2\sqrt{b}\,x+1$$

で定め，$F(x)=f(g(x))$ とする。このとき，4 次方程式 $F(x)=0$ の実数解について考える。

(1) 方程式 $f(x)=0$ が実数解をもつための必要十分条件を a，b を用いて表せ。

(2) 方程式 $F(x)=0$ が実数解をもつならば，方程式 $f(x)=0$ も実数解をもつ。その理由を簡単に説明せよ。

(3) 方程式 $F(x)=0$ がただ 1 つの実数解をもつための必要十分条件を a，b を用いて表せ。また，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ 全体の集合を D とするとき，D を ab 平面上に図示せよ。

(4) 点 $(a,\ b)$ が (3) で定めた集合 D 上を動くとき，方程式 $F(x)=0$ のただ 1 つの実数解のとりうる値の範囲を求めよ。

9 [2012 東北大]

実数 x に対して，関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{x^2+2}{x^2-2x+3}$ と定める。

(1) $x\geqq 0$ のとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) x を正の有理数とし，$f(x)$ の値を互いに素な正の整数 p，q を用いて $f(x)=\dfrac{q}{p}$ と表す。このとき，$q\leqq 3$ となるような x をすべて求めよ。