

$\boxed{1}$ [2015 慶応義塾大]

辺の長さが $2\sqrt{3}$ の正四面体 F がある。F の内部に中心をもち，F のどの辺とも高々 1 点を共有する球を考える。これらの球の中で最大のものを B とすれば，B の体積は

$^{ア}\boxed{}\sqrt{^{イ}\boxed{}}\,\pi$ である。

$\boxed{2}$ [2014 慶応義塾大]

円に内接する四角形 ABCD において，$\angle\mathrm{BCD}=60°$，$\mathrm{CD}=2\sqrt{6}$，$\angle\mathrm{DAB}>\angle\mathrm{CDA}$ である。また 2 直線 BA，CD の交点を E，2 直線 DA，CB の交点を F とすると，$\angle\mathrm{AFB}=45°$，$\mathrm{DE}=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$ である。このとき，

(1) ∠AED の大きさは $^{ア}\boxed{}°$ であり，辺 EB の長さは $^{イ}\boxed{}$ である。

(2) 三角形 AED の面積は，三角形 CEB の面積の $\dfrac{^{ウ}\boxed{}-\sqrt{^{エ}\boxed{}}}{^{オ}\boxed{}}$ 倍である。

$\boxed{3}$ [2013 早稲田大]

面積 1 の正三角形 ABC において，辺 BC の中点を M とする。正の実数 t に対し，線分 AM を $1:t$ に内分する点を P とし，更に直線 BP と辺 AC の交点を Q，直線 CP と辺 AB の交点を R とする。

(1) $\dfrac{\mathrm{QC}}{\mathrm{AQ}}$ を t を用いて表せ。

(2) 三角形 MQR の面積が最大となる t の値と，そのときの面積を求めよ。

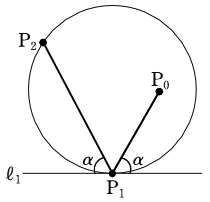
$\boxed{4}$ [2012 早稲田大]

円 C とその内部の点 P_0 が与えられている。初め P_0 にある動点が，円周上の点 P_1 まで線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ 上を動き，P_1 からは，P_1 における円 C の接線 ℓ_1 と線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ のなす角が ℓ_1 と線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ のなす角に等しくなるように向きを変えて，円周上の点 P_2 まで線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ 上を動く (図例 1)。以下，自然数 n について，円周上の点 P_n に至ったあとは，P_n における円 C の接線 ℓ_n と線分 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ のなす角が ℓ_n と線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ のなす角に等しくなるように向きを変え，円周上の点 P_{n+1} まで線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ 上を動き，この動きを繰り返す (図例 2)。線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ と接線 ℓ_1 のなす角を α $\left(0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

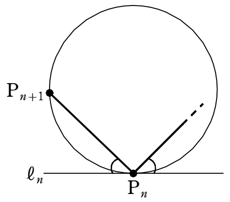
(1) $\mathrm{P}_m=\mathrm{P}_1$ となる 3 以上の自然数 m が存在するような角 α をすべて決定せよ。

(2) 点 P_1 の位置によって角 α は変化しうる。角 α が最大となる P_1 の位置，および最小となる P_1 の位置を求めよ。

(3) $\mathrm{P}_4=\mathrm{P}_1$ となる点 P_1 がとれるような点 P_0 の存在範囲を求めよ。



図例 1



図例 2

$\boxed{5}$ [2015 横浜市立大]

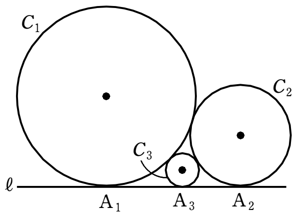
(1) 平面上に相異なる 3 点がある。この 3 点が同一直線上にないとき，この 3 点を通る円は必ず存在し，かつ，1 つだけしかないことを証明せよ。

(2) 平面上に相異なる 3 点 A，B，C があり，A，B 間の距離は，他の 2 点間の距離より短いとする。このとき，線分 AB を直径とする円は，内部に点 C を含まないことを証明せよ。

(3) 平面上に相異なる 4 点がある。この 4 点が同一円周上になく，かつ，どの 3 点も同一直線上にないとする。このとき，うまく 3 点を選ぶと，その 3 点を通る円は，残りの点を内部に含まないようにできることを証明せよ。

$\boxed{6}$ [2014 筑波大]

平面上の直線 ℓ に同じ側で接する 2 つの円 C_1，C_2 があり，C_1 と C_2 も互いに外接している。ℓ，C_1，C_2 で囲まれた領域内に，これら 3 つと互いに接する円 C_3 を作る。同様に ℓ，C_n，C_{n+1} ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) で囲まれた領域内にあり，これら 3 つと互いに接する円を C_{n+2} とする。円 C_n の半径を r_n とし，$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。



ただし，$r_1=16$，$r_2=9$ とする。

(1) ℓ が C_1，C_2，C_3 と接する点を，それぞれ A_1，A_2，A_3 とおく。線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$，$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の長さおよび r_3 の値を求めよ。

(2) ある定数 a，b に対して $x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_n$ ($n=1, 2, 3, \cdots\cdots$) となることを示せ。a，b の値も求めよ。

(3) (2) で求めた a，b に対して，2 次方程式 $t^2=at+b$ の解を α，β $(\alpha>\beta)$ とする。$x_1=c\alpha^2+d\beta^2$ を満たす有理数 c，d の値を求めよ。ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしで用いてよい。

(4) (3) の c，d，α，β に対して，

$$x_n=c\alpha^{n+1}+d\beta^{n+1}\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

となることを示し，数列 $\{r_n\}$ の一般項を α，β を用いて表せ。

$\boxed{7}$ [2011 京都大]

空間内に四面体 ABCD を考える。このとき，4 つの頂点 A，B，C，D を同時に通る球面が存在することを示せ。