

1 [2017 立命館大]

自然数 n の正の約数のうち，2 番目に大きいものを $\langle\!\langle n \rangle\!\rangle$ と表す。
ただし，$2 \leqq n \leqq 100$ とする。例えば，$\langle\!\langle 5 \rangle\!\rangle=1$，$\langle\!\langle 9 \rangle\!\rangle=3$ である。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=2}^{8} \langle\!\langle k \rangle\!\rangle$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=2}^{20} \langle\!\langle 3k \rangle\!\rangle$ を求めよ。

(3)　$\langle\!\langle n \rangle\!\rangle=7$ を満たす n をすべて求めよ。

(4)　$\langle\!\langle n^2 \rangle\!\rangle=n$ ならば，$\langle\!\langle n \rangle\!\rangle=1$ であることを証明せよ。

2 [2017 東北大]

a を 3 で割り切れない正の整数とする。a を 3 で割ったときの商を b，余りを c とする。

(1)　$c=2$ のとき，$2a+1=as+3t$ を満たす負でない整数 s，t を b を用いて表せ。

(2)　n を $n \geqq 2a-2$ を満たす整数とする。このとき，$n=as+3t$ を満たす負でない整数 s，t が存在することを示せ。

3 [2017 名古屋大]

(1)　次の条件 (＊) を満たす 3 つの自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

(＊)　$a<b<c$ かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$ である。

(2)　偶数 $2n$ $(n \geqq 1)$ の 3 つの正の約数 p，q，r で，$p>q>r$ と $p+q+r=n$ を満たす組 (p, q, r) の個数を $f(n)$ とする。ただし，条件を満たす組が存在しない場合は，$f(n)=0$ とする。n が自然数全体を動くときの $f(n)$ の最大値 M を求めよ。また，$f(n)=M$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ。

4 [2017 東北大]

a，b，c を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする。

(1)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつような組 (a, b, c) の総数を求めよ。

(2)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が少なくとも 1 つの整数解をもつような組 (a, b, c) の総数を求めよ。

5 [2017 京都大]

次の問いに答えよ。ただし，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ であることは用いてよい。

(1)　100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ。

(2)　100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ。

6 [2017 香川大]

座標平面上の点 (x, y) は，x，y がともに整数のとき，格子点という。関数
$f(x)=\dfrac{1}{3}(x^3+3x^2-x-2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフ上には格子点が存在しないことを示せ。

(2)　n が整数のとき，点 $(n, f(n))$ における $y=f(x)$ の接線を ℓ とする。直線 ℓ 上には無限に多くの格子点が存在することを示せ。

7 [2015 九州大]

(1)　n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ。

(2)　n を自然数とする。2^n+1 と 2^n-1 は互いに素であることを示せ。

(3)　p，q を異なる素数とする。$2^{p-1}-1=pq^2$ を満たす p，q の組をすべて求めよ。

8 [2014 千葉大]

自然数 n に対して，和 $S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}$ を考える。

(1)　各自然数 n に対して $2^k \leqq n$ を満たす最大の整数 k を $f(n)$ で表すとき，2 つの奇数 a_n，b_n が存在して $S_n=\dfrac{a_n}{2^{f(n)}b_n}$ と表されることを示せ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき S_n は整数にならないことを示せ。

(3)　さらに，自然数 m，n $(m<n)$ に対して，和 $S_{m,n}=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m+1}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n}$ を考える。$S_{m,n}$ はどんな m，n $(m<n)$ に対しても整数にならないことを示せ。

9 [2014 北海道大]

p を素数とする。整数を係数とする n 次多項式 $f(x)$ $(n \geqq 1)$ で，以下の 3 条件を同時に満たしているものをすべて求めよ。

・x^n の係数は 1，・$f(0)=p$，・方程式 $f(x)=0$ の解は相異なる n 個の整数。

10 [2006 横浜市立大]

N を自然数とし，$\phi(N)$ を N より小さくかつ N と互いに素な自然数の総数とする。
すなわち　　$\phi(N)=\#\{n \mid n \text{ は自然数},\ 1 \leqq n<N,\ \gcd(N, n)=1\}$
で，オイラー関数と呼ばれている。ここに $\gcd(a, b)$ は a と b の最大公約数を，$\#A$ は集合 A の要素の総数を意味する。例えば，

$\phi(6)=\#\{1, 5\}=2$，　$\phi(15)=\#\{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14\}=8$

である。

(1)　p と q を互いに異なる素数とし $N=pq$ とおく。

（ア）　N より小さい自然数 n で，$\gcd(N, n) \fallingdotseq 1$ となるものをすべて求めよ。

（イ）　$\phi(N)$ を求めよ。

(2)　p と q を互いに異なる素数とし $N=pq$ とおく。今 N と $\phi(N)$ があらかじめわかっているとき，p と q を解としてもつ 2 次方程式を N や $\phi(N)$ などを用いて表せ。

(3)　$N=84773093$ および $\phi(N)=84754668$ であるとき，$N=pq$ $(p>q)$ となる素数 p および q を求めよ（求めた p および q が素数であることを示さなくてよい)。ただし，必要に応じて以下の数表を使ってもよい。

$320^2=102400$；　$322^2=103684$；　$324^2=104976$；
$326^2=106276$；　$328^2=107584$；　$330^2=108900$

11 [2004 大阪大]

素数 p，q に対して $a_n=p^n-4(-q)^n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ によって整数 a_n を定める．ただし，$p>2q$ とする．

(1)　a_1 と a_2 が 1 より大きい公約数 m をもつならば，$m=3$ であることを示せ．

(2)　a_n がすべて 3 の倍数であるような p，q のうちで積 pq が最小となるものを求めよ．

12 [2003 千葉大]

p を素数とする．x に関する 2 次方程式 $px^2+(5-p^2)x-3p=0$ が整数の解をもつのは $p=2$ のときに限ることを示せ．

13 [2002 九州大]

正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す．ただし，1 および a 自身も約数とする．たとえば $f(1)=1$ であり，$a=15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$f(15)=24$ となる．次の問いに答えよ．

(1)　a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a=2^m b$ と表されるとする．
このとき

$f(a)=(2^{m+1}-1)f(b)$

が成り立つことを示せ．必要ならば，$1+r+\cdots\cdots+r^m=\dfrac{r^{m+1}-1}{r-1}$ $(r \fallingdotseq 1)$ を用いてよい．

(2)　a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする．
このとき

$f(a) \geqq (p+1)q$

が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのは，$q=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ．

(3)　$a=2^2 r$，$b=2^4 s$ (r，s は正の奇数) の形をした偶数 a，b を考える．

$$\begin{cases} f(a)=2b \\ f(b)=2a \end{cases}$$

を満たす a，b を求めよ．