

1 [2017 同志社大]

2 の倍数でも 5 の倍数でもない自然数全体を小さい順に並べて得られた数列を $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とする。

(1) a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 をそれぞれ求めよ。

(2) 2017 はこの数列 $\{a_n\}$ の第何項目になるか。

(3) a_{2017} を求めよ。

(4) m を自然数とする。このとき，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $4m$ 項までの和を m を用いて表せ。

2 [2017 立教大]

数列 $\{p_n\}$, $\{q_n\}$, $\{t_n\}$ は，すべての自然数 n に対して次の等式を満たす。

$$\begin{cases} p_{n+1}=p_n+2q_n \\ q_{n+1}=p_n+q_n \\ t_n=p_n+\sqrt{2}\,q_n \end{cases}$$

ただし，$p_1=q_1=1$ とする。このとき，数列 $\{t_n\}$ は公比 $\boxed{\text{ア}}$ の等比数列であり，一般項は $t_n=\boxed{\text{イ}}$ である。

3 [2017 関西大]

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=6$, $a_{n+1}=\dfrac{6a_n-15}{a_n-2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ により与えられている。

(1) すべての自然数 n に対して，$a_n \neq 5$ であることを，背理法で次のようにして示すことができる。
ある自然数 m $(m>1)$ に対して $a_m=5$ となったとすると，上の関係式より a_{m-1} の値は $\boxed{\text{ア}}$ となる。これを繰り返すと，$a_1=\boxed{\text{イ}}$ となり矛盾する。

(2) $b_n=a_n-5$ とおくとき，b_{n+1} を b_n を用いて表すと，$b_{n+1}=\boxed{\text{ウ}}$ となり，これより，$\{b_n\}$ の一般項は $b_n=\boxed{\text{エ}}$ となる。

(3) したがって，$a_n=\boxed{\text{オ}}$ となる。

4 [2017 福岡大]

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2^{2n-61}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められている。この数列は第 $\boxed{\text{ア}}$ 項で最小値をとる。また，数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\log_2 a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定めると，一般項 b_n は $\boxed{\text{イ}}$ である。

5 [2017 同志社大]

数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を

$a_1=2$, $a_2=2$,

$(n+1)(n+2)a_{n+2}-(n+1)(2n+3)a_{n+1}+n(n+2)a_n=0 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

で定める。

(1) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n=na_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定める。b_{n+2} を n, b_n, b_{n+1} を用いて表せ。

(2) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n=b_{n+1}-b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定める。c_{n+1} を n と c_n を用いて表せ。また，一般項 c_n を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(4) 自然数 n に対し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+1}$ を求めよ。

6 [2017 静岡大]

$\{a_n\}$ を数列とし，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とおく。C を定数とする。数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{S_n\}$ が関係式 $a_1=2$, $a_n=n^2-2S_n+C$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たしているとする。

(1) C の値を求めよ。

(2) a_{n+1} を，a_n と n を用いて表せ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_n-n+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定める。このとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 数列 $\{S_n\}$ の一般項を求めよ。

7 [2017 立教大]

数列 $\{a_n\}$ とその初項から第 n 項までの和 $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ が次を満たすとする。

$$S_{n+2}-6S_{n+1}+8S_n=-2 \ (n \geqq 1),\quad a_1=1,\quad a_2=3$$

(1) S_3 と a_3 の値をそれぞれ求めよ。

(2) $S_{n+1}-S_n=a_{n+1}$ を利用し，a_{n+2} を a_{n+1} と a_n を用いて表せ。

(3) $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$ かつ $a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ となる定数 α, β をそれぞれ求めよ。ただし，$\alpha<\beta$ とする。

(4) α, β が (3) で求めた値であるとき，$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}$ と $a_{n+2}-\beta a_{n+1}$ をそれぞれ n を用いて表せ。

(5) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

8 [2017 津田塾大]

数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式で定義する。

$$a_1=2,\quad 2a_{n+1}-3a_n+1=0 \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ の小数部分を b_n とおく。数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}$ を求めよ。

9 [2017 東京理科大]

数直線上を動く点 P が原点の位置にある。1 枚の硬貨を投げて，表が出たときには P は正の向きに 1 だけ進み，裏が出たときには P は正の向きに 2 だけ進む。自然数 n に対して，硬貨を n 回続けて投げるとき，1 回目から n 回目までのいずれかの時点で点 P の座標が n であるような確率を p_n とする。

(1) $p_1=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$, $p_2=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) $p_{n+2}=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}p_{n+1}+\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}p_n$ が成り立つ。

（ヒント：1 回目に表が出た場合と裏が出た場合について考えよ。）

(3) $a_n=p_{n+1}+\boxed{\text{ケ}}\,p_n$, $b_n=p_{n+1}+\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}p_n$，とおくと，(2) より，$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ はそれぞれ公比 $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$, $\boxed{\text{セ}}$ の等比数列である。

(4) (3) より，$p_n=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}+\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}\left(\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}\right)^n$ が成り立つ。

(5) n がすべての自然数を動くとき，p_n の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$，最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である。

10 [2017 津田塾大]

3 個の箱 A, B, C があり，ボールが 1 個ずつ入っている。コインを投げて表が出れば箱 A のボールと箱 B のボールを交換し，裏が出れば箱 B のボールと箱 C のボールを交換する試行を繰り返す。最初に，箱 A には赤いボールが，箱 B には白いボールが，箱 C には赤いボールが入っているものとして，この試行を n 回繰り返したとき，白いボールが箱 A に入っている確率 a_n，箱 B に入っている確率 b_n，箱 C に入っている確率 c_n をそれぞれ求めよ。

11 [2017 法政大]

平面上に 1 つの円と n 本の直線があり，次の条件を満たしている。① どの直線も円と異なる 2 点で交わっている，② どの 2 直線も平行でない，③ 円と直線の交点および直線同士の交点はすべて異なる点である。

これらの円と n 本の直線によって a_n 個の交点ができ，また平面が b_n 個の部分に分けられるとき，次の問いに答えよ。

(1) a_4 および b_4 の値を求めよ。

(2) a_{n+1} と a_n, b_{n+1} と b_n の関係式をそれぞれ求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

12［2017 大阪市立大］

三角形があり，その頂点を反時計回りの順に A，B，C とする。三角形 ABC において，点 P は頂点 A から出発し，1 秒経過するごとに隣の頂点へ移動する。ただし，反時計回りに移動する確率は $\frac{2}{3}$，時計回りに移動する確率は $\frac{1}{3}$ とする。n を自然数とし，点 P が頂点 A を出発してから n 秒経過したときに頂点 A，B，C にある確率を，それぞれ a_n，b_n，c_n とする。

(1) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を，a_n，b_n，c_n を用いて表せ。

(2) a_{n+2} を c_n を用いて表せ。

(3) a_{n+6} を a_n を用いて表せ。

(4) 0 以上の整数 k に対して a_{6k+1} を求めよ。

13［2017 中央大］

N を 2 以上の自然数とし，複素数 α，β は

$$\alpha+\beta=2N-1,\quad \alpha\beta=(N+1)^2$$

という関係式を満たしているとする。自然数 n に対し，$C_n=\alpha^n+\beta^n$ とおく。

(1) C_2 と C_3 をそれぞれ N の式で表せ。

(2) 恒等式

$$x^{n+2}+y^{n+2}=(x+y)(x^{n+1}+y^{n+1})-xy(x^n+y^n)$$

に注意して，すべての自然数 n に対し，C_n は整数であることを証明せよ。

(3) $C_{n+2}+C_{n+1}+C_n$ は N で割り切れることを示せ。また，このことを用いて，C_{2017} を N で割った余りを求めよ。

14［2017 金沢大］

次の問いに答えよ。ただし，${}_m\mathrm{C}_k$ は m 個から k 個取る組合せの総数を表す。

(1) $k=1$，2，3，4，5，6 に対して，${}_7\mathrm{C}_k$ は 7 の倍数であることを示せ。

(2) p は素数とし，k は $1\leqq k\leqq p-1$ を満たす自然数とする。${}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数であることを示せ。

(3) すべての自然数 n に対して，n^7-n は 7 の倍数であることを数学的帰納法を用いて示せ。

15［2017 大阪府立大］

数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{3}{a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) a_2，a_3 を求めよ。

(2) n は自然数とする。不等式 $a_n>\sqrt{6}$ を証明せよ。

(3) n は自然数とする。不等式 $a_{n+1}-\sqrt{6}<\frac{1}{4}(a_n-\sqrt{6})^2$ を証明せよ。

16［2017 法政大］

数列 $\{a_n\}$ が次のように定められている。

$$a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

ただし，定数 α，β は $\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=-1$ を満たす。

(1) a_2，a_3 を求めよ。

(2) a_{n+2} を a_{n+1} と a_n で表せ。

(3) m を 2 以上の整数とするとき，$a_{6m}=8a_{6m-5}+5a_{6m-6}$ であることを示せ。

(4) m を 1 以上の整数とするとき，a_{6m} が 8 の倍数であることを示せ。

17［2017 学習院大］

自然数 n に対して，条件 $|x+y|\leqq n$ かつ $|x-y|\leqq n$ を満たす整数 x，y の組の個数を a_n とする。

(1) a_4 を求めよ。

(2) a_n を n の式で表せ。

18［2017 鳥取大］

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。$a_1=1$ とし，自然数 n に対して a_n が定まったとき，曲線 C_n：$y=\frac{1}{a_n}x^2$ 上の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n)$ を通り，点 P_n における曲線 C_n の接線に垂直な直線を ℓ_n とし，C_n と ℓ_n の共有点のうち，P_n と異なる点の x 座標を a_{n+1} とする。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) C_n と ℓ_n で囲まれた部分の面積を A_n とするとき，$\sum_{k=1}^{n}A_k$ を求めよ。