

数学B 確率と統計 ADVANCED

1 [2017 鹿児島大]

$n$  は自然数とする。1 枚のコイン投げを  $2n$  回行う。この  $2n$  回のコイン投げで、表が出る合計回数を  $X$  とする。ただし、コインの表と裏の出る確率は等しいとする。

- (1)  $X$  の期待値と標準偏差をそれぞれ求めよ。
- (2)  $\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}$  を求めよ。ただし、 $k=0, 1, 2, \dots, 2n-1$  とする。
- (3)  $P(X=k)$  を最大にする  $k$  の値を求めよ。
- (4)  $n=200$  とする。試行回数が大きいき、 $X$  の確率分布は正規分布で近似できることが知られており、試行回数 400 はこのような近似が成り立つのに十分大きいとみなせる。このことを利用して、 $X$  の値が  $190 \leq X \leq 210$  となる確率の近似値を求めよ。ただし、標準正規分布に従う確率変数  $Z$  に対する  $P(Z>1)$  の近似値としては 0.159 を用いよ。

2 [2001 姫路工業大]

表が出る確率が  $p$  で裏が出る確率が  $1-p$  のコインを 3 回投げる試行を考える。ただし、 $0 < p < 1$  とする。1 回目に表が出る事象を A、3 回のうちちょうど 2 回だけ表が出る事象を B とする。

- (1) 確率  $P(B)$ ,  $P(A \cap B)$  を求めよ。
- (2)  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$  が成り立つような  $p$  の値を求めよ。

3 [2014 鹿児島大]

2 つの確率変数  $X, Y$  の確率分布を同時に考えた表 (同時確率分布表) が右のように与えられている。

ただし、 $X, Y$  は互いに独立であり、 $0 < a < 1, 0 < b < 1$  とする。

	Y	2	4	計
X				
1				$a$
2				
計		$b$		1

- (1) 表を完成させよ。
- (2) 確率変数  $W = X - Y$  の平均  $E(W)$  を求めよ。
- (3) 確率変数  $Z = \frac{Y}{X}$  の確率分布表を作成し、 $Z$  の平均  $E(Z)$  を求めよ。
- (4)  $E(Z) = \frac{9}{4}, E(W) = -\frac{3}{2}$  となる場合に、 $Z$  の分散  $V(Z)$  を求めよ。

4 [2014 鹿児島大]

- (1) 数字 1 が書かれた玉  $a$  個 ( $a \geq 1$ ) と、数字 2 が書かれた玉 1 個がある。これら  $a+1$  個の玉を母集団として、玉に書かれている数字を変量とする。このとき、この母集団から復元抽出によって大きさ 3 の無作為標本を抽出し、その玉の数字を取り出した順に  $X_1, X_2, X_3$  とする。標本平均  $\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$  の平均  $E(\bar{X})$  が  $\frac{3}{2}$  であるとき、 $\bar{X}$  の確率分布とその分散  $V(\bar{X})$  を求めよ。ただし、復元抽出とは、母集団の中から標本を抽出するのに、毎回もとに戻してから次のものを 1 個取り出す抽出法である。
- (2) ある企業の入社試験は採用枠 300 名のところ 500 名の応募があった。試験の結果は 500 点満点の試験に対し、平均点 245 点、標準偏差 50 点であった。得点の分布が正規分布であるとみなされるとき、合格最低点はおおよそ何点であるか。小数点以下を切り上げて答えよ。ただし、確率変数  $Z$  が標準正規分布に従うとき、 $P(Z > 0.25) = 0.4, P(Z > 0.5) = 0.3, P(Z > 0.54) = 0.2$  とする。

5 [2000 千葉大]

$X, Y$  はどちらも 1, -1 の値をとる確率変数で、それらは

$$P(X=1, Y=1) = P(X=-1, Y=-1) = a$$

$$P(X=1, Y=-1) = P(X=-1, Y=1) = \frac{1}{2} - a$$

を満たしているとする。ただし、 $a$  は  $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$  を満たす定数とする。

- (1) 確率  $P(X=-1)$  と  $P(X=1)$  を求めよ。
- (2) 2 つの確率変数の和  $X+Y$  の確率分布を求めよ。
- (3) 2 つの確率変数の和の期待値  $E(X+Y)$  と分散  $V(X+Y)$  を求めよ。
- (4)  $X$  と  $Y$  が互いに独立であるための  $a$  の値を求めよ。