

1［2017 大阪工業大］

関数 $f(x)=\left(\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{x^2}\right)^{10}$ について，$f(x)$ の x^{12} の係数は ア[　　] である。また，$f(x)$ の最小値は イ[　　] である。

2［2017 新潟大］

式の展開に関する次の問いに答えよ。

(1)　$(1+x+y)^6$ の展開式における x^2y^3 の項の係数を求めよ。

(2)　$(1+x+xy)^8$ の展開式における x^5y^3 の項の係数を求めよ。

(3)　$(1+x+xy+xy^2)^{10}$ の展開式における x^8y^{13} の項の係数を求めよ。

3［2014 神戸学院大］

n を自然数とする。$(1+x+x^2+x^3+x^4)^n$ を展開したとき，x^4 の係数について，次のことがいえる。

(1)　$n=3$ のとき，x^4 の係数は ア[　　] である。

(2)　$n=4$ のとき，x^4 の係数は イ[　　] である。

(3)　一般に，x^4 の係数は $\dfrac{n(n+\text{ウ}\boxed{})(n+\text{エ}\boxed{})(n+\text{オ}\boxed{})}{\text{カ}\boxed{}}$ で表される。

ただし，ウ[　　] ＜ エ[　　] ＜ オ[　　] である。

4［2017 立教大］

11^{10} の百の位の数は [　　] である。

5［2013 早稲田大］

13^{13} を 144 で割ったときの余りを求めよ。

6［2013 東京都市大］

n を自然数とする。

(1)　二項定理を用いて，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k=2^n$ が成り立つことを示せ。

(2)　$a_k=\dfrac{1}{k!}$ $(0\leqq k\leqq n)$ に対し，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ を求めよ。

7［2013 横浜市立大］

n を自然数とする。このとき $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{2k+1}}{2k+2}$ を求めよ。

8［2014 早稲田大］

x についての多項式 $P(x)$ を x^2+x+1 で割った余りが $x+1$，x^2-x+1 で割った余りが $x-1$ のとき，$P(x)$ を $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ で割った余りは [　　] である。

9［2007 関西大］

n を 2 以上の整数として，x^n を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

10［2012 立教大］

互いに異なる定数 a，b，c が $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}$ を満たすとき，

$\dfrac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}$ の値を求めよ。ただし，$abc\neq 0$ とする。

11［2008 甲南大］

3 次方程式 $x^3+1=0$ の虚数解の 1 つを α とするとき，次の式の値を求めよ。

$$\alpha^{300}+\alpha^{200}+\alpha^{100}+\frac{1}{\alpha^{100}}+\frac{1}{\alpha^{200}}+\frac{1}{\alpha^{300}}$$

12［2008 自治医科大］

$\dfrac{x-a}{x^2+x+1}>\dfrac{x-b}{x^2-x+1}$ を満たす x (実数とする) の範囲が $\dfrac{1}{2}<x<1$ であるとき，a，b の値を求めよ。

13［2012 神奈川大］

$x<0<y$ である x，y について，$\sqrt{x^2-2xy+y^2}+|2x-5y|=mx+ny$ が常に成り立つとき，m，n の値を求めよ。

14［2011 慶応義塾大］

x の整式 $f(x)$，$g(x)$ について，次の 2 つの恒等式が成り立つ。

$$(x+2)f(x^2)=x^3\{f(x)+7\}-3x-6$$
$$g(x)=f(2x)(x^2+3)-4x+9$$

(1)　$f(10)$ の値を求めよ。

(2)　$g(x)$ を $x+\sqrt{2}$ で割ったときの余りを求めよ。

15［1996 福岡大］

x の関数 $f(x)=2^x(ax^2+bx+c)$ が常に $f(x+1)-f(x)=2^x x^2$ を満たすとき，定数 a, b, c の値の組は $(a, b, c)=$ ア[　　] である．したがって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^k k^2=$ イ[　　] となる．

16［2011 愛知教育大］

実数 $\alpha=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ について考える。

(1)　α^3 を α の 1 次式で表せ。

(2)　α は整数であることを示せ。

17［2012 東北学院大］

$a+b=c+d$，$a+c=b+d$，$a+d=b+c$ のいずれかが成り立つとき，次の等式を証明せよ。

$$4a^2b^2+4c^2d^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=8abcd$$

18［2009 東北大］

a，b，c を実数とする。

(1)　$a+b=c$ であるとき，$a^3+b^3+3abc=c^3$ が成り立つことを示せ。

(2)　$a+b\geqq c$ であるとき，$a^3+b^3+3abc\geqq c^3$ が成り立つことを示せ。

19［1997 福井工業大］

n が奇数のとき，$n(n^4-1)$ は 240 の倍数であることを証明せよ.

20［2015 大阪工業大］

$x>0$ のとき，$x+\dfrac{1}{x}$ の最小値は ア[　　] であり，$x>1$ のとき，$x+\dfrac{2}{x-1}$ の最小値は イ[　　] である。

21［2017 鹿児島大］

実数 α は $\sqrt{2}<\alpha$ を満たすとする。$\sqrt{2}<\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{1}{\alpha}<\alpha$ を示せ。

22［2017 防衛医科大学校］

$x>0$ として，関数 $f(x)=\left(2x+\dfrac{27}{x+1}+2\right)\left(x+\dfrac{6}{x+1}+1\right)$ の最小値を α，最小値を与える x を β とする。このとき，$\alpha+\beta$ を求めよ。

23［2017 富山県立大］

a，b，c，d は実数とする。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$\dfrac{a^2+b^2}{2}\geqq\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

(2)　$a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$

(3)　$\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}\geqq\left(\dfrac{a+b+c+d}{4}\right)^2$

$\boxed{24}$［2015 法政大］

⑴ 任意の負でない a，b について，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ を示せ。

⑵ a，b，c を $a+b+c=1$ を満たす正の数とする。このとき

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)\left(\frac{1}{b}-1\right)\left(\frac{1}{c}-1\right) \geqq 8$$

を示せ。

⑶ a，b，c を $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{1}{c+1}=1$ を満たす正の数とする。このとき

$$abc \geqq 8$$

を示せ。

$\boxed{25}$［2014 中央大］

$x>0$ および $y>0$ に対し，関数 $f(x,\ y)$ を $f(x,\ y)=(x+y)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}\right)$ と定める。

⑴ $f(x,\ y)$ の最小値を求めよ。

⑵ a を正の定数，$f(x,\ y)$ が最小となる $(x,\ y)$ を $(x_0,\ y_0)$ とする。$3^{x_0}=a^{y_0}$ が成立しているとき，a を求めよ。

$\boxed{26}$［2015 愛媛大］

実数 a，b，c は $0<a<b<c$，$\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)$ を満たすとする。このとき，$|b-a|<|b-c|$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{27}$［2015 高知大］

関数 $f(x)=nx^2-2(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)x+(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$ を考える。
ただし，n は正の整数で，a_1，a_2，……，a_n は実数である。

⑴ $n=1$ および $n=2$ のとき，常に $f(x) \geqq 0$ であることを示せ。

⑵ すべての n に対し，常に $f(x) \geqq 0$ であることを示せ。

⑶ $(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2 \leqq n(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$ であることを示せ。

⑷ $(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)^2 = n(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_n{}^2)$ であれば，a_1，a_2，……，a_n はすべて等しいことを示せ。