

1 [2017 法政大]

座標平面上に3点 A$(-4,\ 0)$，B$(2,\ 0)$，C$(0,\ 3)$ がある。A，B，C を頂点とする△ABC の内心を I とし，△ABC と内接円の接点を D，E，F とする。ただし，D は線分 AB 上，E は線分 BC 上，F は線分 CA 上にある。

(1) 線分 AD の長さを a，線分 BE の長さを b，線分 CF の長さを c とすると，

$$\begin{cases} a+b=\boxed{\text{ア}} \\ b+c=\sqrt{\boxed{\text{イ}}} \\ c+a=\boxed{\text{ウ}} \end{cases}$$ となり，$a=\dfrac{\boxed{\text{エ}}-\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ となる。

(2) $\angle\mathrm{IAB}=\theta$ とすると，$\tan 2\theta=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ となる。

一般に，$\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ が成り立つので，$\tan\theta=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ となる。

よって，I の座標は $\left(\dfrac{\boxed{\text{サ}}-\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}},\ \dfrac{\boxed{\text{セ}}-\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}\right)$ となる。

2 [2014 立命館大]

$a>0$ として，関数 $f(x)=\left(2a-\dfrac{1}{a}\right)\cos^2 x+6\cos x\sin x+\left(\dfrac{2}{a}-a\right)\sin^2 x$ を考える。

$f(x)$ を $\cos 2x$，$\sin 2x$ を用いて表すと

$f(x)=\boxed{\text{ア}}\cos 2x+\boxed{\text{イ}}\sin 2x+\boxed{\text{ウ}}$ である。$f(x)$ の最大値を M，最小値を m とすると $M=\boxed{\text{エ}}$，$m=\boxed{\text{オ}}$ である。$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲における，x についての方程式 $f(x)=M$ の解を x_1，$f(x)=m$ の解を x_2 とすると，$\cos x_1=\boxed{\text{カ}}$，$\cos x_2=\boxed{\text{キ}}$，$x_1-x_2=\boxed{\text{ク}}$ である。a を変化させるとき，積 Mm のとりうる値の範囲は $Mm\leqq\boxed{\text{ケ}}$ である。

3 [2014 千葉大]

座標平面上に，原点を中心とする半径1の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(\text{ただし } 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における接線と正方形の隣接する2辺がなす三角形の3辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。

4 [2014 札幌医科大]

三角形 ABC に内接する半径 R の円がある。内接円と辺 BC，CA，AB との接点をそれぞれ D，E，F とする。また $\alpha=\angle\mathrm{A}$，$\beta=\angle\mathrm{B}$，$\gamma=\angle\mathrm{C}$ とする。
三角形 ABC の面積を S_1，三角形 DEF の面積を S_2 とする。

(1) S_1 を R，$\tan\dfrac{\alpha}{2}$，$\tan\dfrac{\beta}{2}$，$\tan\dfrac{\gamma}{2}$ を用いて表せ。

(2) S_2 を R，$\cos\dfrac{\alpha}{2}$，$\cos\dfrac{\beta}{2}$，$\cos\dfrac{\gamma}{2}$ を用いて表せ。

以後 $\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(3) $\dfrac{S_2}{S_1}$ を $\sin\alpha$ と $\cos\alpha$ を用いて表せ。

(4) $\dfrac{S_2}{S_1}$ の最大値を求めよ。

5 [2017 早稲田大]

$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にある θ に対して，$16\cos^4\theta+16\sin^2\theta=15$ が成り立っている。

(1) $\cos 2\theta$ の値を求めよ。

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の値を求めよ。

(3) $\dfrac{\sin 5\theta+\sin 7\theta}{\cos\theta}$ の値を求めよ。

6 [2017 三重大]

α，β，γ を実数とし，また a，b，c を正の実数とする。

(1) x，y，z の式 $\{x-(\cos\alpha)y-(\cos\beta)z\}^2+\{(\sin\alpha)y-(\sin\beta)z\}^2$ を展開して簡単な形にせよ。

(2) 等式 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ が満たされているものとする。このとき不等式
$a+b+c\geqq 2\sqrt{ab}\cos\alpha+2\sqrt{ac}\cos\beta+2\sqrt{bc}\cos\gamma$ が成り立つことを示せ。

(3) $a+b+c\geqq\sqrt{3ab}+\sqrt{3ac}-\sqrt{bc}$ が成り立つことを示せ。また等号が成立するとき，比 $a:b:c$ を求めよ。

7 [2017 高知大]

a と b は正の定数とする。関数 $f(x)=a\cos 2x+2\sqrt{2}\,b\sin x$ について，次の問いに答えよ。

(1) $t=\sin x$ とするとき，$f(x)$ を t の式で表せ。

(2) $a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$ のとき，関数 $y=f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(3) $f(x)<2$ がすべての実数 x について成り立つような点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

8 [2017 岩手大]

座標平面上に2点 A，B を次のようにとる。x 軸の正の部分を始線とし，角 θ の動径と原点 O を中心とする半径2の円との交点を A とし，角 2θ の動径と原点 O を中心とする半径1の円との交点を B とする。更に，A に最も近い x 軸上の点を P とし，B に最も近い x 軸上の点を Q とする。ただし，A が x 軸上にあるときは A 自身を P とし，B が x 軸上にあるときは B 自身を Q とする。

(1) $0<\theta<\pi$ の範囲で三角形 OAB の面積と辺 AB の長さを θ で表せ。

(2) $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で線分 PQ の長さを θ で表せ。

(3) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で線分 PQ の長さの最大値と，そのときの θ の値を求めよ。

(4) $0\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲で線分 PQ の長さが $\dfrac{5}{4}$ となるときの $\cos\theta$ の値を求めよ。

9 [2013 近畿大]

定義域を $0\leqq x\leqq 2\pi$ とする関数 $f(x)=|\sin 2x-2\sin x-2\cos x+1|$ がある。
$t=\sin x+\cos x$ とおき，$f(x)$ を t で表した関数を $g(t)$ とおく。

(1) 関数 $g(t)$ を求めよ。

(2) t がとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $f(x)$ がとりうる値の範囲を求めよ。

(4) 方程式 $f(x)=k$ の異なる実数解の個数 l を k の値で場合分けして求めよ。

10 [2015 中央大]

(1) a，b，c を定数とし，$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ とする。点 A$(1,\ 0)$ を通らない直線 $ax+by=c$ を ℓ とする。直線 ℓ に関して，点 A と対称な点を Q$(\alpha,\ \beta)$ とするとき，α，β を a，b，c を用いて表せ。

円 $x^2+y^2=4$ を C とし，C 上の点 P$(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ における接線を m とする。
直線 m に関して，点 A$(1,\ 0)$ と対称な点を R$(X,\ Y)$ とおく。

(2) 直線 m の方程式を求め，X，Y を θ を用いて表せ。

(3) 点 P が円 C 上を一周するとき，X^2+Y^2 の最大値，最小値，およびそのときの P の座標を求めよ。

11 [2015 早稲田大]

(1) $\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ のみの式で表せ。

(2) (ア) 3次関数 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{4}x$ について増減表を書き，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(イ) $y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が共有点を2つまたは3つもつような定数 k の値の範囲を求めよ。また，k がこの範囲を動くとき，共有点の x 座標のとる値の範囲を求めよ。

(3) 3次方程式 $x^3-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{8}=0$ の解を $x=\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくとき，θ の値を求めよ。

12 [2017 関西大]

$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$s=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$，$t=\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta$ とおく。

(1) s^2+t^2 の値を求めよ。

(2) s および t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) $s=-\dfrac{1}{2}$ のとき，t の値を求めよ。また，そのときの $\cos\theta$ の値を求めよ。

13 [2013 宮崎大]

実数 θ に対し，関数 $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を，$f(\theta)=(\cos\theta)(\cos 2\theta)(\cos 3\theta)$，
$g(\theta)=(\sin\theta)(\sin 2\theta)(\sin 3\theta)$ とおくとき，次の(1)，(2)に答えよ。

(1) 関数 $f(\theta)$，$g(\theta)$ は，それぞれ $f(\theta)=p+q\cos 2\theta+r\cos 4\theta+s\cos 6\theta$，
$g(\theta)=t+u\sin 2\theta+v\sin 4\theta+w\sin 6\theta$ のように表されることを示せ。ただし，p，q，r，s，t，u，v，w は θ によらない定数とする。

(2) $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，方程式 $f(\theta)=g\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ を満たすような θ をすべて求めよ。

14 [2013 東北大]

2 次方程式 $4x^2+2x-1=0$ の 2 つの解を α，β $(\alpha>\beta)$ とする。

(1) $\alpha=\cos\theta$ となる角 θ が，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に 1 つだけ存在することを示せ。

以下，θ は(1)で定まるものとする。

(2) $\beta=\cos 2\theta$ であることを示せ。

(3) θ の値を求めよ。

(4) $\sin\dfrac{3\theta}{4}$ を求めよ。