

1 [1996 青山学院大]

a, b が $\lim_{x\to a}\dfrac{3x^2+5bx-2b^2}{x^2-(2+a)x+2a}=7$ を満たす．このとき a, b の値を求めよ．

2 [2011 明治大]

x の多項式で表される関数 $f(x)$ と，その導関数 $f'(x)$ について，

$$\begin{cases} f(x)=(x+2)f'(x)-\{f'(x)\}^2 & \cdots\cdots ① \\ f'(1)=\dfrac{3}{2} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ が3次以上にならない理由を簡潔に述べよ。

(2) $f(x)$ の x^2 の係数を求めよ。

(3) $f(x)$ を表す式を求めよ。

3 [2008 明治大]

$f(x)$ の $x=1$ における微分係数が存在するとき，次の極限値を $f(1)$，$f'(1)$ で表せ。

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x^3f(1)}{x-1}$$

4 [2008 神戸大]

x の2次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ とその導関数 $f'(x)$ について，次の問いに答えよ。ただし，a，b，c は定数で $a\neq0$ とする。

(1) 実数 α，β について，$f(\alpha)=f(\beta)$ ならば $|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ であることを示せ。

(2) 実数 α，β について，$|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ ならば $f(\alpha)=f(\beta)$ であることを示せ。

5 [2017 名城大]

表面積が 96π である直円柱について考える。底面の半径が x のときの体積を $V(x)$ とする。

(1) $V(x)$ を x の式で表せ。また，x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $V(x)$ が最大値をとるときの x の値を求めよ。

(3) x の値の範囲が $a\leqq x\leqq a+6$ であるときの $V(x)$ の最小値を $M(a)$ とする。ただし，$0<a<4\sqrt{3}-6$ である。このとき，$M(a)$ が最大値をとるような a の値を求めよ。

6 [2017 名城大]

xy 平面上に，曲線 $C: y=x^2(x-t)$ (ただし，t は $t>0$ を満たす定数) がある。

(1) C 上の点を P とし，その x 座標を p とする。P における C の接線の方程式を p を用いて表せ。

(2) 点 A $(a,\ 0)$ (ただし，a は実数) から，C に異なる3本の接線が引けるとき，a のとりうる値の範囲を t を用いて表せ。

(3) (2)の場合，3本の接線のうち，2本の接線が垂直に交わるとき，a の値を t を用いて表せ。

7 [2017 東京理科大]

a，k は実数の定数とし，$f(x)=x^3+x^2+ax+3$ とおく。

(1) 方程式 $f(x)=0$ が重解をもつような a の値を求めよ。また，そのときの $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。

(2) (1)で求めた a の値に対し，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(3) 直線 $y=kx$ が(2)でかいたグラフとただ1つの共有点をもつような k の値の範囲を求めよ。

(4) 方程式 $f(x)=0$ がただ1つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(5) a が(4)で求めた範囲の値をとるとき，方程式 $f(x)=0$ の実数解がとりうる値の範囲を求めよ。

8 [2015 東京理科大]

$a>0$ を定数とし，座標平面上の点 P $(p,\ 0)$ から放物線 $C: y=ax^2+2a$ に2本の接線 PQ_1，PQ_2 を引く。ここで Q_1，Q_2 は接点で，Q_1 の x 座標 q_1 は Q_2 の x 座標 q_2 より小さいとする。

(1) q_1 と q_2 を，p を用いて表せ。

(2) 直線 Q_1Q_2 の方程式を，a と p を用いて表せ。

(3) S_1 を直線 Q_1Q_2 と曲線 C で囲まれた部分の面積，S_2 を曲線 C と線分 PQ_1，PQ_2 で囲まれた部分の面積とする。S_1 と S_2 を，a と p を用いて表し，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

(4) $PQ_1\perp PQ_2$ となるとき，a の値を求めよ。

9 [2015 滋賀大]

a を0以下の定数とする。このとき，$f(x)=2x^3-3(a+2)x^2+8$ と $g(x)=-3x^2-6ax$ について，次の問いに答えよ。

(1) $x\geqq0$ における $f(x)$ の最小値を $m(a)$ とする。$m(a)$ を a の式で表せ。

(2) $s\geqq0$，$t\geqq0$ を満たすすべての s，t に対して $f(s)\geqq g(t)$ となる a の値の範囲を求めよ。

10 [2017 東京理科大]

座標平面において，放物線 $C: y=x^2$ 上に異なる3点 A $(a,\ a^2)$，B $(b,\ b^2)$，C $(c,\ c^2)$ をとり，それぞれの点における接線を順に ℓ，m，n とする。また，m と n の交点を P，n と ℓ の交点を Q，ℓ と m の交点を R とする。

R の座標は $\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}a+\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}b,\ \boxed{オ}ab\right)$ である。R から直線 PQ に下ろした垂線の方程式は $x+\boxed{カ}cy=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}a+\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}b+\boxed{サ}abc$ であり，Q から直線 PR に下ろした垂線の方程式は

$x+\boxed{シ}by=\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}a+\dfrac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}c+\boxed{チ}abc$ である。△PQR の垂心の y 座標は，a，b，c の値に関わらず，常に $\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$ である。

11 [2017 小樽商科大]

a を実数の定数とし，$f(x)=x^3+3ax^2+3x$ とおく。

(1) $f(x)$ が極大値および極小値をそれぞれ1つずつとるような a の値の範囲を求めよ。

(2) a が(1)で求めた範囲にあるとし，$f(x)$ が $x=p$ で極大値をとり，$x=q$ で極小値をとるとする。xy 平面上に点 A $(p,\ f(p))$，点 B $(q,\ f(q))$ をとるとき，次の条件を満たす a の値をすべて求めよ。

条件：点 A と点 B の中点が直線 $y=-x$ 上にある。

12 [2015 千葉大]

m を実数とする。x に関する方程式 $x^3-3x-|x-m|=0$ の実数解の個数を求めよ。

13 [2017 同志社大]

関数 $f(x)=x^3-6x^2$ とする。原点を O とする座標平面において，曲線 $C: y=f(x)$ と直線 $\ell: y=mx$ について考える。ただし，m は実数とする。

(1) 関数 $y=f(x)$ の増減を調べ，そのグラフの概形をかけ。

(2) 曲線 C と直線 ℓ との共有点の個数が3個であるような m の値の範囲を求めよ。

(3) 曲線 C と直線 ℓ との共有点が3個のとき，それらを O，A $(\alpha,\ f(\alpha))$，B $(\beta,\ f(\beta))$ とする。ただし，$\alpha<\beta$ とする。曲線 C 上の点 A における接線と，点 B における接線とが垂直であるような m の値を求めよ。

14 [2017 京都産業大]

xy 平面上の曲線 $C: y=4x^4-x^2$ を考える。

(1) 関数 $f(x)=4x^4-x^2$ の増減を増減表により調べ，曲線 C の概形をかけ。ただし，曲線の凹凸は調べなくてよい。

(2) 曲線 C 上の点 A $(t,\ 4t^4-t^2)$ における曲線 C の接線 ℓ の方程式を求めよ。

(3) (2)のとき，接線 ℓ が y 軸と交わる点 B の y 座標の最大値を求めよ。

(4) (2)のとき，曲線 C と接線 ℓ の共有点の個数を，$t>0$ の範囲で求めよ。

15 [2017 神戸大]

t を正の実数とする。$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$ とおく。

(1) $2t^3-3t^2+1$ を因数分解せよ。

(2) $f(x)$ が極小値0をもつことを示せ。

(3) $-1\leqq x\leqq2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を t の式で表せ。

$\boxed{16}$［2017 上智大］

1 辺の長さが a の正六角形 ABCDEF を底面とし，O を頂点にもつ六角錐 O－ABCDEF を考える。$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}=\mathrm{OE}=\mathrm{OF}=\sqrt{2}$ とする。

(1) 六角錐の底面の面積を T とすると，$T=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\,a^2$ である。

(2) 六角錐の表面積を S とすると $S=T+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}a\sqrt{\boxed{\text{カ}}-a^2}$ であり，体積を V とすると $V=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}a^2\sqrt{\boxed{\text{ケ}}-a^2}$ である。

(3) $a=1$ のとき，六角錐に内接する球の半径は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}+\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

(4) 六角錐のすべての頂点を通る球の半径は $\dfrac{1}{\sqrt{\boxed{\text{セ}}-a^2}}$ であり，六角錐の体積 V をその球の体積で割った値が最大となるのは，$a=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ のときである。

$\boxed{17}$［2017 関西大］

次の関係式 $|2\sin^3\theta+3\cos^2\theta-2|-k=0$ ……(＊) を考える。ここで，$0\leqq\theta<2\pi$ であり，k は実数である。

(1) $f(\theta)=|2\sin^3\theta+3\cos^2\theta-2|$ とおく。$x=\sin\theta$ とおいたとき，$f(\theta)$ を x を用いて表した式 $g(x)$ を求め，曲線 C：$y=g(x)$ の概形をかけ。

(2) 曲線 C と直線 $y=k$ が 2 つ以上の共有点をもつような k の値の範囲を求めよ。

(3) k を (2) の範囲の最小値とするとき，(＊) を満たす θ の値を求めよ。

$\boxed{18}$［2015 北海道大］

2 つの放物線 C_1：$y=x^2$，C_2：$y=-(x-1)^2$ がある。a は 0 でない実数とし，C_1 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線と平行な C_1 の接線を ℓ とする。

(1) ℓ の方程式を a で表せ。

(2) C_2 と ℓ が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3) C_2 と ℓ が異なる 2 つの共有点 R，S をもつとする。線分 PQ の長さと線分 RS の長さが等しくなるとき，a の値を求めよ。