

1 [2015 福井大]

三角形OABがあり，$0<p<1$，$0<q<1$ として，辺OAを $p:(1-p)$ に内分する点をC，辺OBを $q:(1-q)$ に内分する点をDとする。線分ADと線分BCの交点をE，線分AB，OE，CDの中点をそれぞれF，G，Hとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を，p，q，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 3点F，G，Hは一直線上にあることを示せ。

(3) $\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=3$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{2}{3}\pi$ に対して $\mathrm{GF}:\mathrm{GH}=7:2$，$\mathrm{AB}\perp\mathrm{GF}$ となるとき，p と q の値を求めよ。

2 [2017 関西学院大]

$\triangle\mathrm{ABC}$ とその重心Gに対して $\mathrm{AG}=2$，$\mathrm{BG}=3$，$\angle\mathrm{AGB}=\dfrac{2}{3}\pi$ であるとする。

このとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は ${}^{ア}\boxed{}$ である。$\overrightarrow{\mathrm{GC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{GA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{GB}}$ を用いて表すと

$\overrightarrow{\mathrm{GC}}={}^{イ}\boxed{}$ であるから，$\mathrm{GC}={}^{ウ}\boxed{}$ である。また，$\cos\angle\mathrm{BGC}={}^{エ}\boxed{}$ であり，

$\mathrm{BC}={}^{オ}\boxed{}$ である。

3 [2010 香川大]

点Oを中心とし，半径1の円に内接する $\triangle\mathrm{ABC}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ を満たしている。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ。　(2) $\angle\mathrm{AOB}$，$\angle\mathrm{AOC}$ を求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を求めよ。

(4) 辺BCの長さ，および頂点Aから対辺BCに引いた垂線の長さを求めよ。

4 [2017 三重大]

座標平面上に点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$，$\mathrm{C}(1,\ 0)$ がある。線分AB上に点P，線分BC上に点Q，線分CA上に点Rをとる。$\triangle\mathrm{ABC}$ の外心をEとするとき，次の問いに答えよ。

(1) Eの座標を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=l\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{EP}}$ の大きさを l を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{PQR}$ の外心がEと一致するとき，l の値のとりうる範囲を求めよ。

5 [2017 東北大]

s を正の実数とする。鋭角三角形ABCにおいて，辺ABを $s:1$ に内分する点をDとし，辺BCを $s:3$ に内分する点をEとする。線分CDと線分AEの交点をFとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ。

(2) Fから辺ACに下ろした垂線をFGとする。FGの長さが最大となるときの s を求めよ。

6 [2017 北海道大]

平面上の点Oを中心とする半径1の円を C とする。円 C の内部に点Aがある。円 C の周上を2点P，Qが条件 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たしながら動く。線分PQの中点をRとする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$|\vec{a}|=r$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とする。ただし，$0<r<1$ とする。

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2$ を内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を用いて表せ。

(2) 直線OA上の点Bで，$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ が2点P，Qの位置によらず一定であるものを求めよ。また，このときの $|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ の値を r を用いて表せ。

7 [2017 静岡大]

平面上に三角形OABがある。実数 k に対して，直線AB上の点Cを $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす点とする。

(1) 等式 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$ が成り立つことを示せ。

(2) 等式 $(1-k)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+k|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+(1-k)|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+k|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2$ が成り立つことを示せ。

(3) 平面上の点Dが等式

$$(1-k)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+k|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2+(1-k)|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2+k|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$$

を満たすとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ の値を求めよ。

8 [2017 大阪府立大]

平面上に，$\mathrm{AB}=3$，$\mathrm{AD}=3$，$\mathrm{DC}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\sqrt{6}$ であり，辺ABと辺DCが平行な台形ABCDがある。また，t を $0<t<1$ である実数とする。線分BDを $t:(1-t)$ の比に内分する点をPとし，直線APと直線BCの交点をQとする。

(1) 三角形BCDの面積 S_0 を求めよ。

(2) 正の実数 s を $\mathrm{BQ}:\mathrm{BC}=s:1$ で定めるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ および s を用いて表せ。

(3) (2)の s を t を用いて表せ。

(4) 線分PQと線分DCが共有点をもたない t の範囲を求めよ。

(5) t が(4)で求めた範囲にあるとする。四角形PQCDの面積と三角形ABPの面積が等しくなるときの t の値を求めよ。

9 [2017 三重大]

座標平面上に点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1)$，$\mathrm{C}(k,\ k)$ をとる。ただし k は正の実数である。また $\angle\mathrm{OAB}$ を θ と表す。

(1) $\cos\theta$，$\cos 2\theta$ を求めよ。

(2) $\angle\mathrm{OCA}=2\theta$ となるように k を定めよ。

(3) k を(2)で求めたものとする。3点A，B，Cを通る円と x 軸との交点で，A以外のものをDと表す。このとき $\cos\angle\mathrm{DCA}$ を求めよ。また $\triangle\mathrm{OCD}$ と $\triangle\mathrm{ACD}$ の面積比を求めよ。

10 [2015 広島大]

座標平面上に原点Oと2点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ をとり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。点Cは $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，$0^\circ<\angle\mathrm{AOC}<90^\circ$，$0^\circ<\angle\mathrm{BOC}<90^\circ$ を満たすとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。

(2) 線分ABと線分OCの交点をDとする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。

(3) 点Cから線分OAに引いた垂線と線分ABの交点をEとする。Dは(2)で定めた点とする。このとき，$\triangle\mathrm{OBD}$ と $\triangle\mathrm{CDE}$ の面積の和を t を用いて表せ。

11 [2017 香川大]

三角形ABCにおいて，辺ABを $m:n$ に内分する点をP，辺ACを $n:m$ に内分する点をQ，辺BCの中点をMとする。ただし，$m>0$，$n>0$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) 線分AMとPQの交点をRとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，m，n を用いて表せ。

(3) $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AM}}$ を m，n を用いて表し，線分PQが三角形ABCの重心を通らないことを示せ。

12 [2013 島根大]

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を $a_1=1$，$b_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{4}a_n-\dfrac{\sqrt{3}}{4}b_n$，$b_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a_n+\dfrac{1}{4}b_n$ によって定め，座標が $(a_n,\ b_n)$ である点を C_n とする。原点をOとするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}$ の大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}|$ を，n を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OC}_n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}_{n+1}}$ のなす角を求めよ。

(3) S_n を $\triangle\mathrm{OC}_n\mathrm{C}_{n+1}$ の面積とするとき，$S_n\leqq\dfrac{1}{2^{2013}}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

13 [2013 滋賀大]

$\triangle\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ において辺 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$，$\mathrm{B}_1\mathrm{O}_1$，$\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1$ の中点をそれぞれ O_2，A_2，B_2 とする。次に，$\triangle\mathrm{O}_2\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$ において辺 $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$，$\mathrm{B}_2\mathrm{O}_2$，$\mathrm{O}_2\mathrm{A}_2$ の中点をそれぞれ O_3，A_3，B_3 とする。これを繰り返して，$\triangle\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ において辺 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$，$\mathrm{B}_n\mathrm{O}_n$，$\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n$ の中点をそれぞれ O_{n+1}，A_{n+1}，B_{n+1} とする。ただし，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ である。また，$\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{B}_1}=\vec{b}$，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=\sqrt{6}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{3}{2}$ である。

(1) $\triangle\mathrm{O}_1\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ の重心をGとするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{GO}_1}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{GA}_1}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{GB}_1}|$ の値を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ の重心がGであることを，数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) $\triangle\mathrm{O}_n\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ がGを中心とする半径 10^{-4} の円の内部に含まれる最小の n の値を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

$\boxed{14}$［2013 新潟大］

平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ はそれぞれの大きさが 1 であり，また平行でないとする。

(1) $t \geqq 0$ であるような実数 t に対して，不等式 $0 < |\vec{a}+t\vec{b}|^2 \leqq (1+t)^2$ が成立することを示せ。

(2) $t \geqq 0$ であるような実数 t に対して $\vec{p} = \dfrac{2t^2\vec{b}}{|\vec{a}+t\vec{b}|^2}$ とおき，$f(t) = |\vec{p}|$ とする。このとき，不等式 $f(t) \geqq \dfrac{2t^2}{(1+t)^2}$ が成立することを示せ。

(3) $f(t) = 1$ となる正の実数 t が存在することを示せ。