

1 [2012 駒澤大]

空間における点Pの座標を $(5,\ -6,\ 2)$ とするとき，点Pと x 軸に関して対称な点の座標は ア$\boxed{\quad}$ であり，点Pと yz 平面に関して対称な点の座標は イ$\boxed{\quad}$ であり，点Pと点 $(2,\ -1,\ 5)$ に関して対称な点の座標は ウ$\boxed{\quad}$ である。

2 [2007 立命館大]

xyz 空間において，点 $(3,\ 5,\ 6)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(1,\ 2,\ -1)$ に平行な直線と yz 平面との交点の座標を求めよ。

3 [2011 東京都市大]

空間の3点 $A(3,\ 2,\ 6)$，$B(5,\ -1,\ 4)$，$C(x,\ y,\ 0)$ が同一直線上にあるとき
$x=$ ア$\boxed{\quad}$，$y=$ イ$\boxed{\quad}$ である。

4 [2008 関西大]

座標空間内に，4点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(1,\ 1,\ 0)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(1,\ 1,\ 1)$ がある。
$\triangle OAC$ の重心をGとするとき，線分GBを $1:2$ に内分する点Pの座標を求めよ。

5 [2014 駒澤大]

$\vec{a}=(1,\ 1,\ -5)$，$\vec{b}=(2,\ 1,\ 1)$，$\vec{c}=(-1,\ 0,\ 1)$ のとき，
$(1,\ 2,\ -2)=$ ア$\boxed{\quad}\vec{a}+$ イ$\boxed{\quad}\vec{b}+$ ウ$\boxed{\quad}\vec{c}$ である。

6 [2015 芝浦工業大]

空間の3点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(1,\ 0,\ 1)$，$B(0,\ 1,\ 2)$ について，$\cos\angle AOB=$ ア$\boxed{\quad}$ であり，$\triangle OAB$ の面積は イ$\boxed{\quad}$ である。

7 [2007 東京電機大]

空間の3点 $L(2,\ 1,\ 0)$，$M(1,\ 2,\ 0)$，$N(2,\ 2,\ 1)$ に対して，$\angle LMN$ の大きさを求めよ。

8 [2008 青山学院大]

2つのベクトル $\vec{a}=(t,\ t+1,\ t+2)$，$\vec{b}=(1,\ t+1,\ 2t+1)$ が直交するのは $t=\boxed{\quad}$ のときである。

9 [2013 北里大]

ベクトル $\vec{a}=(x,\ 11,\ 2y)$，$\vec{b}=(x-4,\ 2,\ y-6)$ を考える。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行であるとき，実数 x，y の値を求めよ。また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直であるとき，実数 x，y の値を求めよ。

10 [2010 横浜市立大]

空間における3点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(1,\ 0,\ 1)$，$B(0,\ 1,\ -1)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 2点A，B間の距離を求めよ。　(2) 三角形OABの面積を求めよ。

(3) 三角形OABの外接円の半径を求めよ。

11

2つのベクトル $\vec{a}=(6,\ -1,\ -4)$，$\vec{b}=(-6,\ 3,\ -4)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。

12 [1999 神奈川大]

ベクトル $\vec{a}=(-1,\ -1,\ -1)$，$\vec{b}=(1,\ 2,\ 3)$ について，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ を最小にする t の値を求めよ.

13 [2015 小樽商科大]

四面体OABCにおいて，辺ABの中点をD，辺BCを $2:1$ に内分する点をE，$\triangle OCA$ の重心をF，$\triangle DEF$ の重心をGとする。そのとき，$\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ で表せ。

14 [2012 北里大]

平行六面体 ABCD－EFGH において，辺CGのGを越える延長上に $CG=3GP$ となるように点Pをとり，直線APと平面BDEの交点をQとする。このとき，
$2\overrightarrow{AP}=$ ア$\boxed{\quad}\overrightarrow{AB}+$ イ$\boxed{\quad}\overrightarrow{AD}+$ ウ$\boxed{\quad}\overrightarrow{AE}$，
$\overrightarrow{AQ}=$ エ$\boxed{\quad}\overrightarrow{AB}+$ オ$\boxed{\quad}\overrightarrow{AD}+$ カ$\boxed{\quad}\overrightarrow{AE}$ となる。

15 [2012 東京都市大]

2点A，Bを結ぶ線分ABを $1:4$ に外分する点をCとする。点A，B，Cの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}=(-1,\ 2,\ -5)$，$\vec{b}=(x,\ y,\ 1)$，$\vec{c}=(-2,\ 3,\ z)$ とするとき，x，y，z の値を求めよ。

16 [2015 立教大]

座標空間における4点 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 2,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 3)$，$D(x,\ 4,\ 5)$ が同一平面上にあるとき，$x=\boxed{\quad}$ である。

17 [2003 宮城大]

四面体OABCにおいて，$OA=OC$ であるとする．更に，BCを $1:2$ に内分する点をD，ADを $3:1$ に内分する点をEとするとき，$OE\perp AC$ であるとする．また，
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OE}=\vec{e}$ とおく．

(1) $\vec{e}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$ であることを示せ．ただし，記号 $\vec{x}\cdot\vec{y}$ はベクトル $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積を表す．

(3) $OA:OB=2:1$，$OE\perp BC$ であるとき，$\angle AOC$ を求めよ．

18 [2003 静岡大]

座標空間内に四面体OABCがあり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．$0<t<1$ を満たす t に対し，辺OB，OCを $t:(1-t)$ の比に内分する点をそれぞれK，Lとし，辺AB，ACを $t:(1-t)$ の比に内分する点をそれぞれM，Nとする．

(1) 四角形KLNMは平行四辺形であることを示せ．

(2) $\overrightarrow{KL}$，$\overrightarrow{KM}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) $\vec{a}=(2,\ -1,\ 0)$，$\vec{b}=(1,\ 2,\ 0)$，$\vec{c}=(-1,\ 1,\ 2)$ とするとき，平行四辺形KLNMの面積を t を用いて表せ．

19 [2003 星薬科大]

四面体OABCにおいて，$OA=3$，$OB=4$，$OC=5$ で，$\angle AOB$，$\angle AOC$，$\angle BOC$ はそれぞれ $60°$ をなしている．このとき，辺BCの長さは ア$\boxed{\quad}$ である．次に，頂点Oから辺BCへ垂線OPを下ろすとき，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくと，
$\overrightarrow{OP}=$ イ$\boxed{\quad}\vec{b}+$ ウ$\boxed{\quad}\vec{c}$ と表される．したがって，$|\overrightarrow{OP}|=$ エ$\boxed{\quad}$ となる．また，頂点Aから面OBCに垂線AQを下ろすと，$\overrightarrow{OQ}=$ オ$\boxed{\quad}\vec{b}+$ カ$\boxed{\quad}\vec{c}$ と表される．したがって，$|\overrightarrow{AQ}|=$ キ$\boxed{\quad}$ となるので，四面体OABCの体積は ク$\boxed{\quad}$ となる．

20 [2003 自治医科大]

Oを原点とする座標空間に，3点 $A(2,\ 2,\ 3)$，$B(0,\ 1,\ 1)$，$C(-3,\ 5,\ 8)$ がある．

(1) $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ の相互の内積は

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=$ ア$\boxed{\quad}$，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=$ イ$\boxed{\quad}$，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=$ ウ$\boxed{\quad}$

である．

(2) 点Cから3点O，A，Bを通る平面へ下ろした垂線の足をHとすると，CHがOA，OBと垂直であるから，$\overrightarrow{OH}=$ エ$\boxed{\quad}\overrightarrow{OA}+$ オ$\boxed{\quad}\overrightarrow{OB}$ と表される．

(3) CHの長さは カ$\boxed{\quad}$，三角形OABの面積は キ$\boxed{\quad}$ であるから，四面体OABCの体積は ク$\boxed{\quad}$ である．

21 [2000 札幌医科大]

四面体OABCを考え，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とする．また，線分OA，OB，OCを $2:1$ に内分する点をそれぞれ A'，B'，C' とし，直線 BC' と直線 $B'C$ の交点をD，3点 A'，B，Cを通る平面と直線ADとの交点をEとする．

(1) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ で表せ．

(2) $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

22 [1999 大分大]

四面体ABCDにおいて，線分BDを3 : 1に内分する点をE，線分CEを2 : 3に内分する点をF，線分AFを1 : 2に内分する点をG，直線DGが3点A，B，Cを含む平面と交わる点をHとする．$\vec{b}=\overrightarrow{AB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{AC}$，$\vec{d}=\overrightarrow{AD}$とおくとき

(1) $\overrightarrow{AF}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$を用いて表せ.

(2) $\overrightarrow{DH}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$を用いて表し，比DG : GHを求めよ.

23 [2012 近畿大]

座標空間において，2点A(1, 2, 1)，B(3, 5, 2)がある。直線ABと平面$y=8$との交点の座標は

$\left({}^{ア}\boxed{},\ 8,\ {}^{イ}\boxed{}\right)$

である。

24 [2015 甲南大]

ベクトル(3, 2, 4)に垂直で原点を通る平面の方程式を求めよ。

25 [2014 岡山理科大]

3点A(0, 1, −2)，B(2, 3, −2)，C(0, 3, 0)について，次の点の座標をそれぞれ求めよ。

(1) △ABCの重心G

(2) 3点A，B，Cから等距離にあるxy平面上の点D

(3) (1)で求めたGと(2)で求めたDに対して，線分GDを1 : 3に内分する点

26 [2005 早稲田大]

座標空間内にxy平面と交わる半径5の球がある。その球の中心のz座標の値が正であり，その球とxy平面の交わりが作る円の方程式が

$$x^2+y^2-4x+6y+4=0$$

であるとき，その球の中心の座標を求めよ。

27 [2002 早稲田大]

座標空間に2点A$\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ 1\right)$，B(2, 1, −3)がある．原点をOとして，次の問いに答えよ.

(1) ∠AOBの大きさを求めよ.

(2) △OABの面積を求めよ.

(3) 2点A，Bを通る直線とyz平面との交点Pの座標を求めよ.

(4) 原点Oから2点A，Bを通る直線に下ろした垂線をOHとするとき，Hの座標を求めよ.

28 [2017 センター]

座標空間において4点A(2, 0, 0)，B(1, 1, 0)，C(1, 0, 1)，D(x, y, z)を考える。

(1) 三つのベクトル$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$について

$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\boxed{ア}$ ……①

$\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=\boxed{イ}$ ……②

である。$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$に当てはまるものを，次の⓪～⑧のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $x-y-1$	① $y-z-1$	② $z-x-1$
③ $x-y$	④ $y-z$	⑤ $z-x$
⑥ $x-y+1$	⑦ $y-z+1$	⑧ $z-x+1$

(2) AB＝BC＝CA＝$\sqrt{\boxed{ウ}}$により，三角形ABCは正三角形である。以下，4点A，B，Dが，正四面体の四つの頂点になるとする。このときのx，y，zの値を求めよう。ただし，$x>1$とする。

ベクトル$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{DC}$の大きさは，いずれも$\sqrt{\boxed{エ}}$であり，どの二つのベクトルのなす角も$\boxed{オカ}^\circ$である。

よって，$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}=\boxed{キ}$となる。

このことと①，②および$|\overrightarrow{DA}|=|\overrightarrow{DB}|=|\overrightarrow{DC}|=\sqrt{\boxed{エ}}$により，

$(x,\ y,\ z)=\left(\boxed{ク},\ \boxed{ケ},\ \boxed{コ}\right)$となる。

(3) $(x,\ y,\ z)=\left(\boxed{ク},\ \boxed{ケ},\ \boxed{コ}\right)$のときを考える。線分ABの中点をP，線分DAを1 : 2に内分する点をQ，線分DCを$t:(1-t)$ $(0<t<1)$に内分する点をRとする。三角形PQRの面積Sが最小になるときのtの値を求めよう。

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=\frac{\boxed{サシ}}{\boxed{スセ}},\quad |\overrightarrow{PR}|^2=\boxed{ソ}t^2-\boxed{タ}t+\frac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}$$

であり，$\overrightarrow{PQ}$と$\overrightarrow{PR}$のなす角をθとすると，$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|\sin\theta$なので

$$\begin{aligned}4S^2&=|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2\sin^2\theta\\&=|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2-|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2\cos^2\theta\\&=t^2-\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}t+\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニヌ}}\end{aligned}$$

である。

よって，Sは$t=\frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノハ}}$のとき最小になる。

29 [2013 センター]

四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$とおく。$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=6$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=9$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=4$，$\cos\angle BOC=\frac{3}{4}$であるとする。

(1) $\cos\angle AOB=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$であり，$\sin\angle AOB=\frac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$である。また，三角形OABの面積は$\frac{\boxed{オ}\sqrt{\boxed{カ}}}{\boxed{キ}}$である。

(2) xを$1<x<8$を満たす実数とし，$|\vec{c}|=2x$であるとする。このとき，四面体OABCの体積が最大となるxの値を求めよう。

まず，三角形OABの面積はxの値によらず一定であるので，四面体OABCの体積が最大となるためには三角形OABを底面としたときの四面体OABCの高さが最大になればよいことに注意しよう。

実数s，tに対して，$\overrightarrow{OD}=s\vec{a}+t\vec{b}$となるように点Dをとり，$\overrightarrow{CD}=\vec{n}$とおく。

$\vec{n}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\boxed{ク}x$であるので，$\vec{a}\cdot\vec{n}=4s+9t-4$，$\vec{b}\cdot\vec{n}=9(s+4t-x)$，

$\vec{c}\cdot\vec{n}=\boxed{ケ}s+\boxed{コ}tx-\boxed{サ}x^2$となる。

以下では，$|\vec{n}|$が，三角形OABを底面としたときの四面体OABCの高さとなるように，$\vec{a}\perp\vec{n}$，$\vec{b}\perp\vec{n}$とする。このとき

$\vec{a}\cdot\vec{n}=\boxed{シ}$，　$\vec{b}\cdot\vec{n}=\boxed{ス}$ ……①

である。①により，s，tはxを用いて

$$s=-\frac{1}{\boxed{セ}}\left(\boxed{ソ}x-\boxed{タチ}\right),\quad t=\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{セ}}(x-1)$$

と表される。さらに，$|\vec{n}|^2=(s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{n}$と①に注意して，$|\vec{n}|^2$を$x$を用いて表すと

$$\begin{aligned}|\vec{n}|^2&=-\frac{\boxed{テ}}{\boxed{セ}}\left(x^2-\boxed{ト}x+\boxed{ナ}\right)\\&=-\frac{\boxed{テ}}{\boxed{セ}}\left(x-\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}\right)^2+\boxed{ネノ}\end{aligned}$$

となる。$1<\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}<8$であるので，$x=\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$のとき，$|\vec{n}|$は最大となり，四面体OABCの体積は最大となる。

30［2012 センター］

空間に異なる4点O，A，B，Cを，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OA}$ となるようにとり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおく。さらに，3点D，E，Fを，$\overrightarrow{OD}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{OE}=\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{OF}=\vec{a}+\vec{c}$ となるようにとり，線分BDの中点をL，線分CEの中点をMとし，線分ADを3：1に内分する点をNとする。

(1) $\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{ON}$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて $\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{\boxed{ア}}\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{ON}=\vec{a}+\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\vec{b}$ と表される。

(2) 2直線FL，MNが交わることを確かめよう。$0<s<1$ とし，線分FLを $s:(1-s)$ に内分する点をPとする。$\overrightarrow{OP}$ は，s と $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて

$$\overrightarrow{OP}=\left(\boxed{エ}-\frac{s}{\boxed{オ}}\right)\vec{a}+s\vec{b}+\left(\boxed{カ}-s\right)\vec{c}$$

と表される。$s=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ のとき，$\overrightarrow{MP}=\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\overrightarrow{MN}$ となるので，M，N，Pは一直線上にある。よって，2直線FL，MNは交わることがわかる。

(3) 2直線FL，MNの交点をGとする。$\overrightarrow{OG}$，$\overrightarrow{GF}$ は，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\left(\boxed{ス}\vec{a}+\boxed{セ}\vec{b}+\vec{c}\right)$$

$$\overrightarrow{GF}=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\left(\vec{a}-\boxed{セ}\vec{b}+\boxed{ソ}\vec{c}\right)$$

と表される。

$|\vec{a}|=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=\sqrt{3}$ とする。このとき，$|\overrightarrow{GF}|=\boxed{タ}$，$|\overrightarrow{GM}|=2$ となる。

次に，直線OC上に点Hをとり，実数 t を用いて，$\overrightarrow{OH}=t\vec{c}$ と表す。

$\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GH}$，$\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{GH}$ は，t を用いて

$$\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GH}=\boxed{チ}t+\frac{\boxed{ツテ}}{\boxed{ト}}\quad\cdots\cdots ①,\qquad \overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{GH}=2t+\frac{10}{3}\quad\cdots\cdots ②$$

と表される。

さらに，$\angle FGH=\angle MGH$ とする。このときの t の値を求めよう。

$|\overrightarrow{GF}|=\boxed{タ}$，$|\overrightarrow{GM}|=2$ と $\angle FGH=\angle MGH$ であることから

$$\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GH}=\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}\overrightarrow{GM}\cdot\overrightarrow{GH}\quad\cdots\cdots ③$$

が成り立つ。①，②，③から，$t=\dfrac{\boxed{ヌ}}{\boxed{ネ}}$ である。