

1 [2010 大阪工業大]

$a_5=3$，$a_{10}=-12$ である等差数列 $\{a_n\}$ の公差は ${}^{\text{ア}}\boxed{}$ で，一般項 $a_n={}^{\text{イ}}\boxed{}$ である。

2 [2007 東京電機大]

初項 20，公差 3 の等差数列の初項から第 10 項までの和を求めよ。

3 [2015 名城大]

等差数列 $\{a_n\}$ の第 10 項が 50，第 25 項が -55 であるとき，初項 a_1 は ${}^{\text{ア}}\boxed{}$ である。

また，$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，S_n が最大になるのは $n={}^{\text{イ}}\boxed{}$ のときである。

4 [2014 大阪工業大]

7 で割ると 3 余る自然数を小さい順に並べた数列 3，10，17，24，…… の一般項を a_n とおくと，$a_n={}^{\text{ア}}\boxed{}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ であり，$a_n>2014$ を満たす最小の自然数 n の値は ${}^{\text{イ}}\boxed{}$ である。

5 [2014 慶応義塾大]

等差数列 $\{a_n\}$ は，初項から第 5 項までの和は 50 で，$a_5=16$ であるとする。このとき，一般項 a_n は，$a_n={}^{\text{ア}}\boxed{}$ となり，初項から第 n 項までの和 S_n は，$S_n={}^{\text{イ}}\boxed{}$ となる。

6 [2008 広島工業大]

第 10 項が 81，第 25 項が 51 の等差数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 初項から第 n 項までの和を S_n とする。S_n が最大になるときの n とそのときの S_n の値を求めよ。

7 [2005 武庫川女子大]

4 つの整数 a，b，c，d $(a<d)$ は，この順に等差数列をなしており，4 つの数の和は 32 である。また，$bc=ad+8$ を満たしている。このとき，a の値を求めよ。

8 [1998 函館大]

等差数列をなす 3 つの数がある．その和は 33 になり，その積は 1232 になる．このとき，3 つの数を求めよ．

9 [2001 千葉経済大]

ある等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする．

$S_5=100$，$S_{10}=300$ のとき，S_n を求めよ．

10 [2007 足利工業大]

第 3 項が 18，第 4 項が 54 の等比数列の初項と公比を求めよ。

11 [2010 東京電機大]

公比が正である等比数列の第 4 項が 12，第 6 項が 192 であるとき，第 7 項を求めよ。

12 [2010 中央大]

3 つの数 $x-2$，$x+1$，$x+7$ がこの順で等比数列となるとき，x の値を求めよ。

13 [2014 京都産業大]

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項は，すべての位が 5 である n 桁の整数である。たとえば，$a_4=5555$ である。このとき，$a_n=\dfrac{{}^{\text{ア}}\boxed{}}{{}^{\text{イ}}\boxed{}}\left({}^{\text{ウ}}\boxed{}^{\,n}-{}^{\text{エ}}\boxed{}\right)$ であり，第 1 項から第 n 項までの和は $\dfrac{{}^{\text{オ}}\boxed{}}{{}^{\text{カ}}\boxed{}}\left({}^{\text{ウ}}\boxed{}^{\,n}-{}^{\text{エ}}\boxed{}\right)-\dfrac{{}^{\text{キ}}\boxed{}}{{}^{\text{ク}}\boxed{}}$ である。

14 [2007 自治医科大]

(1) 3 つの実数 2^{x+2}，2^{2x}，2^4 がこの順に等差数列をなすような x の値を求めよ。

(2) 3 つの実数 $\log_2 x$，$\log_2 4x$，$\log_2 8x$ がこの順に等比数列をなすような x の値を求めよ。

15 [2005 千葉工業大]

初項 $a_1=2$，公比 8 の等比数列 $\{a_n\}$ において，a_{34} は $\boxed{}$ 桁の整数である。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

16 [2003 同志社女子大]

$4+4\times3+4\times3^2+\cdots\cdots+4\times3^{15}$ を求めると ${}^{\text{ア}}\boxed{}\left(3^{{}^{\text{イ}}\boxed{}}-1\right)$ である.

17 [2000 近畿大]

第 3 項が 4，第 6 項が $-\dfrac{1}{2}$ である，公比が実数の等比数列の初項は ${}^{\text{ア}}\boxed{}$，公比は ${}^{\text{イ}}\boxed{}$ である.

また，この数列の第 11 項から第 20 項までの和は $\dfrac{2^{{}^{\text{ウ}}\boxed{}}-1}{3\times2^{{}^{\text{エ}}\boxed{}}}$ となる.

18 [2013 大阪工業大]

等差数列 $\{a_n\}$ と等比数列 $\{b_n\}$ について，$a_1=b_1=12$，$a_4=b_4=96$ であるとする。

(1) 等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d，等比数列 $\{b_n\}$ の公比を r とすると，$d={}^{\text{ア}}\boxed{}$，$r={}^{\text{イ}}\boxed{}$ である。ただし，r は実数とする。

(2) a_7，b_3 をそれぞれ求めると，$a_7={}^{\text{ウ}}\boxed{}$，$b_3={}^{\text{エ}}\boxed{}$ である。

(3) 等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$S_n={}^{\text{オ}}\boxed{}$ である。

(4) 等比数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とする。$T_n>S_{10}$ を満たす最小の自然数 n は，$n={}^{\text{カ}}\boxed{}$ である。

19 [2003 広島国際学院大]

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k+3)$ を求めよ.

20 [1998 八戸工業大]

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k-2)(k+3)$ の値を求めよ．ただし $n\geqq2$ とする.

21 [1997 福岡工業大]

数列 $1,\ \dfrac{1+2}{2},\ \dfrac{1+2+3}{3},\ \dfrac{1+2+3+4}{4},\ \cdots\cdots$ の初項から第 25 項までの和は $\boxed{}$ である.

22 [1997 城西大]

数列 $\dfrac{1}{1\cdot5},\ \dfrac{1}{3\cdot7},\ \dfrac{1}{5\cdot9},\ \dfrac{1}{7\cdot11},\ \cdots\cdots$ の初項から第 n 項までの和は

$$\frac{n\left({}^{\text{ア}}\boxed{}\,n+5\right)}{3\left({}^{\text{イ}}\boxed{}\,n+1\right)\left({}^{\text{ウ}}\boxed{}\,n+3\right)}$$ である.

23 [1997 明治大]

$\displaystyle\sum_{k=1}^{400}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ を求めよ.

24 [1997 福岡大]

数列 $\{a_n\}$ が，5, 11, 21, 35, 53, …… のとき

(1) 一般項 a_n を求めよ.

(2) 初項から第 n 項までの和を求めよ.

$\boxed{25}$ [1997 高知大]

(1) $S_n=\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ を求めよ．

(2) 初項1，公差2の等差数列の第 k 項を x_k とし，初項1，公比2の等比数列の第 k 項を y_k とする．このとき，$T_n=\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ を求めよ．

$\boxed{26}$ [1997 福岡大]

次のような数列の初項から第99項までの和を求めよ．

$\frac{2\cdot1+1}{6\cdot1^2},\ \frac{2\cdot2+1}{6(1^2+2^2)},\ \frac{2\cdot3+1}{6(1^2+2^2+3^2)},\ \frac{2\cdot4+1}{6(1^2+2^2+3^2+4^2)},\ \cdots\cdots$

$\boxed{27}$ [1998 兵庫大]

次の和を求めよ．ただし n は2以上の整数とする．

$1\cdot(n-1)+2\cdot(n-2)+\ \cdots\cdots\ +(n-2)\cdot2+(n-1)\cdot1$

$\boxed{28}$ [2000 早稲田大]

$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{i} k\right)$ を計算せよ．

$\boxed{29}$ [2002 福岡大]

$S_n=2^2+4^2+\ \cdots\cdots\ +(2n)^2$ を求めよ．

$\boxed{30}$ [2002 京都産業大]

$\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ の値を求めよ．

$\boxed{31}$ [2008 大阪工業大]

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=5^n-1$ のとき，一般項は $a_n=pq^{n-1}$，ただし，$p=^{ア}\boxed{}$，$q=^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{32}$ [2006 大阪薬科大]

初項から第 n 項までの和が $2n^2-3n$ である数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ。

$\boxed{33}$ [2007 昭和薬科大]

数列の項が，次のように第 m 群は m 個の数からなるように分けられている。

$1\ |\ 3,\ 5\ |\ 7,\ 9,\ 11\ |\ 13,\ 15,\ 17,\ 19\ |\ 21,\ 23,\ 25,\ 27,\ 29\ |\ 31,\ \cdots\cdots$

(1) 第17群の最後の数を求めよ。

(2) 第17群の17個の数の和を求めよ。

$\boxed{34}$ [2007 中央大]

有理数列

(＊) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \cdots\cdots$

について，次の問いに答えよ。

(1) 数列(＊)の $\frac{37}{50}$ は第何項になるか。

(2) 数列(＊)の第1000項の数を求めよ。

(3) 初項から第1000項までの和を求めよ。

$\boxed{35}$ [1998 高知大]

年利率を r とする複利法により，毎年の初めに a 円ずつ n 年間積み立てるとき，第 n 年末における積立金の元利合計 S(円)を求める式を作れ．なお，複利法とは前年末の利子込み残高に対して(1＋利率)を掛けていく方法である．

$\boxed{36}$ [2017 岩手大]

数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$2a_{n+1}=a_n+2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を満たすとき，この数列の一般項を求めよ。

$\boxed{37}$ [2013 東京電機大]

$a_1=3$，$a_{n+1}=3a_n-10$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

$\boxed{38}$ [2015 福岡大]

$a_1=4$，$a_{n+1}=a_n+18n+6$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列の一般項を求めると，$a_n=^{ア}\boxed{}$ である。また，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{39}$ [2014 広島市立大]

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=2$，$a_{n+1}-a_n=(n+1)(n+2)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$\boxed{40}$ [2011 法政大]

$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2^n-2n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定義される数列の一般項 a_n を求めよ。

$\boxed{41}$ [2002 福岡大]

$a_1=5$ および $a_{n+1}=3a_n-8$ $(n=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots)$ で定義された数列 $\{a_n\}$ がある．

$a_n=b_n+c$ とおく．数列 $\{b_n\}$ が等比数列になるとき，c の値を求めると $c=^{ア}\boxed{}$ である．また，この数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n=^{イ}\boxed{}$ である．

$\boxed{42}$ [2015 福岡大]

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$S_n=4n-a_n$ が成り立つとき，この数列の一般項 a_n を求めると $a_n=\boxed{}$ である。

$\boxed{43}$ [2017 福岡大]

条件 $a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ において，$b_n=\frac{1}{a_n}$ とおく。このとき，b_{n+1} を b_n で表すと $b_{n+1}=^{ア}\boxed{}$ となるから，これより数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めると $a_n=^{イ}\boxed{}$ となる。

$\boxed{44}$ [2014 南山大]

初項が2である数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ の初項から第 n 項までの和 S_n について，$S_{n+1}-2S_n=n^2-n+2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立っている。

(1) S_2 を求めよ。

(3) $n\geqq2$ であるとき，S_n-2S_{n-1} を n の式で表せ。

(3) $a_{n+1}-2a_n$ を n の式で表せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{45}$ [2014 慶応義塾大]

n を自然数とする。数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=5$，$a_{n+1}=\frac{25}{{a_n}^2}$ を満たす。このとき，

(1) $a_3=^{ア}\boxed{}$，$a_4=\frac{^{イ}\boxed{}}{^{ウ}\boxed{}}$ である。

(2) $b_n=\log_5 a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を n の式で表すと，

$$b_n=\frac{\left(^{エ}\boxed{}\right)^{n-1}}{^{オ}\boxed{}}+\frac{^{カ}\boxed{}}{^{キ}\boxed{}}$$ である。

$\boxed{46}$ [2012 関西大]

$a_1=1$，$na_{n+1}=2(n+1)a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められている数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$\boxed{47}$ [2015 奈良県立医科大]

次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$a_1=3$，$a_2=5$，$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

48［2012 熊本大］

数列 $\{a_n\}$ に対して次の漸化式が成り立つとする。

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) 定数 c に対して $b_n=a_n+c$ で定められた数列 $\{b_n\}$ を考える。

$$b_{n+2}-5b_{n+1}+6b_n=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たす c の値を求めよ。

(2) a_n を n の式で表せ。

49［2001 山口大］

$a_1=2,\ a_2=4,\ 2a_{n+2}=a_n+3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

50［1997 和光大］

$a_1=\dfrac{1}{5},\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{5a_n+6}\ (n\geqq1)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n との関係式を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

51［2009 倉敷芸術科学大］

n を自然数とするとき，7^n-2n-1 が 4 の倍数であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

52［2003 東北学院大］

次の等式を数学的帰納法を用いて証明せよ．

$$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\ \cdots\cdots\ +n\cdot1=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

53［2010 津田塾大］

$n\geqq5$ を満たす自然数 n に対して，$n^2<2^n$ が成り立つことを証明せよ。

54［2000 創価大］

a を任意の正の実数とする．このとき，任意の自然数 $n\,(=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ に対して

$$(1+a)^n\geqq1+na$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

55［2012 愛知大］

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+3a_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ により定める。

(1) $a_2,\ a_3,\ a_4$ をそれぞれ求めよ。

(2) 一般項 a_n を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法によって証明せよ。

56［2005 奈良大］

数列 $\{a_n\}$ の第 n 項が $a_n=3^n-2n+3$ と表されるとき

(1) $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$ を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ は，(1) で求めた初項 a_1 と漸化式 $a_{n+1}=pa_n+qn+r$ で与えられる。定数 $p,\ q,\ r$ を求めよ。

(3) a_n が 4 の倍数であることを，数学的帰納法を用いて示せ。

57［2012 センター］

$\{a_n\}$ を $a_2=-\dfrac{7}{3},\ a_5=-\dfrac{25}{3}$ である等差数列とし，自然数 n に対して，$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ とおく。$a_1=\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$ であり，$\{a_n\}$ の公差は $\boxed{\text{エオ}}$ である。したがって

$$a_n=\boxed{\text{カキ}}\,n+\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$$S_n=\boxed{\text{コ}}\,n^2+\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\,n\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

である。

次に，数列 $\{b_n\}$ は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=\frac{4}{3}b_n+S_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ ……① を満たすとする。

数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよう。① から，$b_1=\boxed{\text{ス}}$ である。さらに，

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}b_k=\sum_{k=1}^{n}b_k+b_{n+1}$ に注意して，① を利用すると

$$b_{n+1}=\boxed{\text{セ}}\,b_n+\boxed{\text{ソ}}\,n+\boxed{\text{タ}}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

が成り立ち，この等式は

$$b_{n+1}+\boxed{\text{チ}}(n+1)+\boxed{\text{ツ}}=\boxed{\text{セ}}\left(b_n+\boxed{\text{チ}}\,n+\boxed{\text{ツ}}\right)\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

と変形できる。ここで，$c_n=b_n+\boxed{\text{チ}}\,n+\boxed{\text{ツ}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ ……② とおくと，$\{c_n\}$ は，$c_1=\boxed{\text{テ}}$，公比が $\boxed{\text{ト}}$ の等比数列であるから，② により

$$b_n=\boxed{\text{ナ}}^{\boxed{\text{ニ}}}-\boxed{\text{ヌ}}\,n-\boxed{\text{ネ}}\qquad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

である。ただし，$\boxed{\text{ニ}}$ については，当てはまるものを，次の ⓪ ～ ④ のうちから一つ選べ。

⓪ $n-2$　① $n-1$　② n　③ $n+1$　④ $n+2$

58［2014 センター］

数列 $\{a_n\}$ の初項は 6 であり，$\{a_n\}$ の階差数列は初項が 9，公差が 4 の等差数列である。

(1) $a_2=\boxed{\text{アイ}}$，$a_3=\boxed{\text{ウエ}}$ である。数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう。$\{a_n\}$ の階差数列の第 n 項が $\boxed{\text{オ}}\,n+\boxed{\text{カ}}$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$a_n=\boxed{\text{キ}}\,n^{\boxed{\text{ク}}}+\boxed{\text{ケ}}\,n+\boxed{\text{コ}}$ ……① である。

(2) 数列 $\{b_n\}$ は，初項が $\dfrac{2}{5}$ で，漸化式 $b_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}-1}b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ ……② を満たすとする。$b_2=\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ である。数列 $\{b_n\}$ の一般項と初項から第 n 項までの和 S_n を求めよう。①，② により，すべての自然数 n に対して

$b_{n+1}=\dfrac{\boxed{\text{セ}}\,n+\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{セ}}\,n+\boxed{\text{タ}}}b_n$ ……③ が成り立つことがわかる。ここで，

$c_n=\left(\boxed{\text{セ}}\,n+\boxed{\text{ソ}}\right)b_n$ ……④ とするとき，③ を c_n と c_{n+1} を用いて変形すると，すべての自然数 n に対して $\left(\boxed{\text{セ}}\,n+\boxed{\text{チ}}\right)c_{n+1}=\left(\boxed{\text{セ}}\,n+\boxed{\text{ツ}}\right)c_n$ が成り立つことがわかる。これにより $d_n=\left(\boxed{\text{セ}}\,n+\boxed{\text{テ}}\right)c_n$ ……⑤ とおくと，すべての自然数 n に対して，$d_{n+1}=d_n$ が成り立つことがわかる。

$d_1=\boxed{\text{ト}}$ であるから，すべての自然数 n に対して，$d_n=\boxed{\text{ト}}$ である。

したがって，④ と ⑤ により，数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$b_n=\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\left(\boxed{\text{セ}}\,n+\boxed{\text{ソ}}\right)\left(\boxed{\text{セ}}\,n+\boxed{\text{テ}}\right)}$ である。また，

$b_n=\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{セ}}\,n+\boxed{\text{ソ}}}-\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{セ}}\,n+\boxed{\text{テ}}}$ が成り立つことを利用すると，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n は $S_n=\dfrac{\boxed{\text{ヌ}}\,n}{\boxed{\text{ネ}}\,n+\boxed{\text{ノ}}}$ であることがわかる。

$\boxed{59}$ [2014 センター]

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=4$，$a_{n+1}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n+3n+3$ （$n=1$，2，3，$\cdots$）…… ① で定める。

$\{a_n\}$ の一般項を求めよう。まず，$a_2=\boxed{\text{ア}}$，$a_3=\boxed{\text{イウ}}$，$a_4=\boxed{\text{エオ}}$

であることにより，$\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\boxed{\text{カ}}$ …… ② と推定できる。$\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～③ のうちから一つ選べ。

⓪ $n+3$ ① $4n$ ② 2^{n+1} ③ $12-\frac{8}{n}$

② の推定が正しいことを，数学的帰納法によって証明しよう。

[Ⅰ] $n=1$ のとき，$a_1=4$ により ② が成り立つ。

[Ⅱ] $n=k$ のとき，② が成り立つと仮定すると，① により

$$a_{k+1}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{k}\right)a_k+3k+3=\boxed{\text{キ}}$$

である。よって，$n=\boxed{\text{ク}}$ のときも ② が成り立つ。

[Ⅰ]，[Ⅱ] により，② はすべての自然数 n について成り立つ。

$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑦ のうちから一つずつ選べ。
ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $k+1$ ① $k+4$ ② $4k+1$ ③ $4k+4$

④ 2^{k+1} ⑤ 2^{k+2} ⑥ $12-\frac{8}{k}$ ⑦ $12-\frac{8}{k+1}$

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると $S_n=\boxed{\text{ケ}}n^2+\boxed{\text{コ}}n$ …… ③
である。

次に，$\{a_n\}$ と同じ漸化式を満たし，初項が異なる数列 $\{b_n\}$ を

$$b_1=7,\ b_{n+1}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)b_n+3n+3 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \ \cdots\cdots ④$$

で定める。$\{b_n\}$ の一般項を求めよう。① と ④ により，すべての自然数 n に対して

$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)(b_n-a_n)$ である。

$c_n=\frac{b_n-a_n}{n}$ （$n=1$，2，3，$\cdots$）…… ⑤ とおくと，数列 $\{c_n\}$ は，初項 $\boxed{\text{サ}}$，公比 $\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ の等比数列であるから，一般項は，$c_n=\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}^{\boxed{\text{タ}}}}$ となる。ただし，$\boxed{\text{タ}}$ については，当てはまるものを，次の ⓪～④ のうちから一つ選べ。

⓪ n ① $n-1$ ② $n+1$ ③ $n-2$ ④ $n+2$

したがって，② と ⑤ により $b_n=\boxed{\text{カ}}+\frac{\boxed{\text{セ}}n}{\boxed{\text{ソ}}^{\boxed{\text{タ}}}}$ が成り立つ。

数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を T_n とする。⑤ により $b_n=a_n+nc_n$ であるから，

$T_n=S_n+\sum_{k=1}^{n}kc_k$ である。$U_n=\sum_{k=1}^{n}kc_k$ とおくと

$$U_n-\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ソ}}^{k-1}}-\frac{\boxed{\text{ツ}}n}{\boxed{\text{ソ}}^{n}}$$ となり

$U_n=\frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}-\frac{\boxed{\text{ニ}}n+\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ナ}}\cdot\boxed{\text{ネ}}^{n-1}}$ …… ⑥ が成り立つ。$T_n=S_n+U_n$ と ③ と ⑥ により，

T_n を得ることができる。

$\boxed{60}$ [2015 センター]

数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=-40,\ a_{n+1}=|4n-a_n|+2a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \ \cdots\cdots ①$$

を満たしているとする。$\{a_n\}$ の一般項を求めよう。

(1) $a_2=-\boxed{\text{アイ}}$，$a_3=-\boxed{\text{ウエ}}$ であるので，最初の 3 項については

$$a_n\leqq 4n \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立っている。いま，初項から第 m 項まで ② が成り立っているとすると，

$n=1$，2，……，m に対して，① により $a_{n+1}-a_n=\boxed{\text{オ}}n$ を満たす。

よって，$n=1$，2，……，$m+1$ に対して

$$a_n=\boxed{\text{カ}}n^2-\boxed{\text{キ}}n-\boxed{\text{クケ}} \quad \cdots\cdots ③$$

と表される。ここで $\boxed{\text{カ}}n^2-\boxed{\text{キ}}n-\boxed{\text{クケ}}>4n$ を満たす最小の自然数 n は

$\boxed{\text{コ}}$ であるので，$n=1$，2，……，$\boxed{\text{コ}}$ のとき，a_n は ③ で定まる。また，

$a_{\boxed{\text{コ}}}=\boxed{\text{サシ}}$ である。

(2) 以下，$n\geqq\boxed{\text{コ}}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよう。まず，このとき

$$a_n>4n \quad \cdots\cdots ④$$

であることを数学的帰納法により確かめる。

[Ⅰ] $n=\boxed{\text{コ}}$ のとき，$a_{\boxed{\text{コ}}}=\boxed{\text{サシ}}$ であるので，④ が成り立つ。

[Ⅱ] $k\geqq\boxed{\text{コ}}$ として，$n=k$ のとき ④ が成り立つと仮定する。① により

$a_{k+1}=\boxed{\text{ス}}a_k-\boxed{\text{セ}}k$ であるので，$a_{k+1}>8k$ となる。また，$8k>4(k+1)$
であるので，$n=k+1$ のときにも ④ が成り立つ。

[Ⅰ]，[Ⅱ] により，$n\geqq\boxed{\text{コ}}$ のとき，④ が成り立つ。

したがって，①，④ により

$$a_{n+1}=\boxed{\text{ス}}a_n-\boxed{\text{セ}}n \quad (n\geqq\boxed{\text{コ}}) \ \cdots\cdots ⑤$$

である。$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，⑤ により，b_n と b_{n+1} は関係式

$$b_{n+1}=\boxed{\text{ソ}}b_n-\boxed{\text{タ}} \quad (n\geqq\boxed{\text{コ}})$$

を満たし，この関係式は $b_{n+1}-\boxed{\text{チ}}=\boxed{\text{ツ}}\left(b_n-\boxed{\text{チ}}\right)$ と変形できる。

$b_{\boxed{\text{コ}}}=\boxed{\text{テト}}$ であるので $b_n=\boxed{\text{ナニ}}\cdot\boxed{\text{ツ}}^{n-\boxed{\text{コ}}}+\boxed{\text{チ}}$ である。

⑤ から，$b_n=\boxed{\text{ヌ}}a_n-\boxed{\text{セ}}n$ なので，$n\geqq\boxed{\text{コ}}$ のとき

$$a_n=\frac{1}{\boxed{\text{ヌ}}}\left(b_n+\boxed{\text{セ}}n\right)$$

$$=\boxed{\text{ネノ}}\cdot\boxed{\text{ツ}}^{n-\boxed{\text{コ}}}+\boxed{\text{ハ}}n+\boxed{\text{ヒ}}$$

である。