$\boxed{1}$確率分布,平均,分散　[2013 鹿児島大]

0，1，2，3，4 の数字が 1 つずつ記入された 5 枚のカードがある。この 5 枚のカードの中から 1 枚引き，数字を記録して戻すという作業を 3 回繰り返す。ただし，3 回ともどのカードを引く確率も等しいとする。記録した 3 つの数字の最小値を X とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$k=0$，1，2，3，4 に対して確率 $P(X\geqq k)$ を求めよ。

(2)　確率変数 X の確率分布を表で表せ。

(3)　確率変数 X の平均 (期待値) $E(X)$ を求めよ。

(4)　確率変数 X の分散 $V(X)$ を求めよ。

$\boxed{2}$平均,分散.確率変数の変換　[2003 センター]

1 から 8 までの整数のいずれか一つが書かれたカードが，各数に対して 1 枚ずつ合計 8 枚ある。D さんがカードを引いて，賞金を得るゲームをする。その規則は次のとおりである。

100 円のゲーム代を払って，カードを 1 枚引き，書いてある数が X のとき，$pX+q$ 円を受け取る。ここで，p，q は正の整数とする。

(1)　確率変数 X の平均 (期待値) は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ であり，分散は $\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ である。

(2)　D さんがカードを 1 枚引いて受け取る金額からゲーム代を差し引いた金額を Y 円とする。確率変数 Y の平均を N とするとき，N を p と q を用いて表すと

$N=\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}p+q-\boxed{クケコ}$ である。

(3)　$N=0$ を満たす p，q の値の組の総数は $\boxed{サシ}$ である。その中で，p の最小値は $\boxed{ス}$，最大値は $\boxed{セソ}$ である。

(4)　Y の分散は $\dfrac{\boxed{タチ}}{\boxed{ツ}}p^2$ である。したがって，$N=0$ のとき Y の分散の最小値 C は，$p=\boxed{テ}$ のとき起こり，$C=\boxed{トナ}$ である。

$\boxed{3}$二項分布の期待値･標準偏差

10 %の割合で不良品を含む多数の製品から任意に 4 個を取り出し，それに含まれる不良品の個数を X で表す．X の期待値，標準偏差を求めよ．

$\boxed{4}$二項分布　[1998 鹿児島大]

赤玉 r 個，青玉 b 個，白玉 w 個合わせて 100 個入った袋がある．この袋から無作為に 1 個の玉を取り出し，色を調べてからもとに戻す操作を n 回繰り返す．このとき，赤玉を取り出した回数を X とする．また，n 回の操作で n 回目に初めて青玉が出たとき，それまでに赤玉を取り出した回数を Y とする．

(1)　X の平均と標準偏差を n, r を用いて表せ．

(2)　X の平均が $\dfrac{16}{5}$，標準偏差が $\dfrac{8}{5}$ であるとき，袋の中の赤玉の個数 r および回数 n を求めよ．

(3)　r, n は (2) で求めた値であり，Y の平均が $\dfrac{15}{4}$ であるとき，袋の中の青玉の個数 b を求めよ．

$\boxed{5}$確率密度関数

確率変数 X のとる値の範囲が $1\leqq x\leqq 3$ で，その確率密度関数 $f(x)$ が $f(x)=ax$ であるとき，定数 a の値を求めよ．また，$P(1\leqq X\leqq 2)$ の値を求めよ．

$\boxed{6}$正規分布の利用

ある男子高校生 500 人の身長が，平均 170.0 cm，標準偏差 5.5 cm の正規分布に従ったという．

(1)　身長が 180 cm 以上の生徒は約何人いるか．

(2)　身長が 165 cm の男子は，500 人中約何番目の高さか．

$\boxed{7}$二項分布の近似

1 枚の硬貨を 400 回投げるとき，表の出る回数 X が 200 回以上 220 回以下となる確率を求めよ．

$\boxed{8}$二項分布と正規分布

1 枚の硬貨を n 回投げたとき，表の出る回数を X とする．

$\left|\dfrac{X}{n}-\dfrac{1}{2}\right|\leqq 0.01$ となる確率が 0.97 以上になるためには，n をどのくらい大きくするとよいか．正規分布による近似を行い，100 未満を切り上げて答えよ．

$\boxed{9}$標本平均の分布

ある県の高校生に実施した試験の得点の分布は，平均 58 点，標準偏差 12 点の正規分布に従った．この母集団から無作為に 100 人の標本を抽出したとき，その標本平均 $\overline{X}$ が 55 点以上 61 点以下である確率を求めよ．

$\boxed{10}$標本平均の分布（標本平均と正規分布、中心極限定理）

ある農園のリンゴ1個当たりの重さは平均275g、標準偏差10gの正規分布に従う。

(1)　この農園のリンゴのうち、重さが270gから290gであるものは全体の何%か。

(2)　この農園のリンゴから4個を無作為抽出したとき、その重さの平均が280g以上になる確率を求めよ。

$\boxed{11}$母比率と標本比率

ある野球選手が打率（ヒットを打つ確率）は0.300である。今シーズンの打席から無作為に300打席を抽出したとき、打率が0.275以上0.305以下である確率を求めよ。

ただし $\sqrt{7}=2.65$ とする。

$\boxed{12}$標本比率の分布

日本人の血液型は 10 人に 3 人の割合で O 型であるという．n 人の日本人を無作為に抽出するとき，k 番目に抽出された人が O 型ならば 1，それ以外の血液型ならば 0 の値を対応させる確率変数を X_k とする．

(1)　標本平均 $\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+\cdots\cdots+X_n}{n}$ の期待値と標準偏差を求めよ．

(2)　$\overline{X}$の標準偏差を 0.01 以下にするためには，標本の大きさ n をどのくらい大きくするとよいか．

$\boxed{13}$大数の法則

さいころをn回投げるとき、5または6の目が出る相対度数をRとする。

n＝200, 1800, 5000の各場合について、$P\left(\left|R-\dfrac{1}{3}\right|\leqq 0.01\right)$ の値を求めよ。

$\boxed{14}$母平均の推定

あるみかん農園で、みかんを100個無作為抽出したところ、みかん1個の重さは平均120.0gであった。母標準偏差を25.0gだとし、みかん1個当たりの重さの平均値を信頼度95%で推定せよ。

$\boxed{15}$推定の誤差と標本数

ある県で実施された試験の平均点を，信頼度 99 %，誤差 2 点以内で推定したいとすると，少なくとも何人以上の受験者の得点を任意抽出しなければならないか．ただし，従来の経験で点数の標準偏差は 20 点としてよいとする．

$\boxed{16}$母比率の推定

(1)　ある都市において無作為に100世帯を抽出したところ、ペットを飼っているのは64世帯であった。この都市全体におけるペットを飼っている世帯の割合を、信頼度95%で推定せよ。

(2)　さいころを投げて6の目が出る確率を信頼度99%で推定することを考える。信頼度の区間の幅を0.01以下にするには、さいころを何回以上投げればよいか。

$\boxed{17}$母比率の推定　[2015 鹿児島大]

ある病気に対して投与する薬の効果の有無を調べたい。薬を投与し，効果有と判断される比率は p であるとする。この病気を持った患者から無作為に n 人を選び，薬を投与したとき，i 番目の患者に薬の効果が認められれば 1 とし，認められなければ 0 とする確率変数を X_i とする。

(1)　標本平均 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ の平均，および分散を求めよ。

(2)　この病気を持った患者から無作為に 400 人を選び，薬を投与したところ 320 人に薬の効果が認められた。このとき，母比率 p の信頼度 95 % の信頼区間を，小数第 3 位を四捨五入して求めよ。ただし，標本の大きさ 400 は十分大きい数とみなせるとし，また確率変数 Z が標準正規分布に従うとき，$P(Z<-1.96)=0.025$ が成り立つとする。

$\boxed{18}$仮説検定（両側検定）

さいころを自作して600回投げたところ、6の目が120回出た。このさいころは、6の目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ ではないと判断してよいか、有意水準5%で検定せよ。

ただし $\sqrt{\dfrac{5}{6}}=0.91$ とする。

$\boxed{19}$仮説検定（片側検定）

ある野球選手の昨シーズンの打率は0.264であった。この選手はオフにバッティングフォーム改造に取り組み、今シーズンでは300打席を無作為抽出したところヒットを打った打席は92回であった。この選手はフォーム改造によって打率が上がっていると判断してよいか、有意水準5%で検定せよ。ただし $\sqrt{58.2912}=7.63$ とする。

$\boxed{20}$母平均の検定

ある模試では数学の平均点が54.0点、標準偏差は12.5であった。また、A高校の生徒のうち100名を抽出したところ、平均点は58.6点であった。この場合、A高校の生徒全員の平均点が模試全体の平均点と異なると判断してよいか。有意水準5%で検定せよ。

$\boxed{21}$[2015 センター]

14000 人の生徒に対して，科目 A と科目 B の試験を実施した。試験の点数は正規分布に従うと考え，必要に応じて正規分布表を用いてもよい。

科目 A の平均点は 66.2 点，標準偏差は 15.0 点であった。点数の高い順に順位をつけたとき，この試験で 80 点であった生徒の順位は $\boxed{\text{ア}}$ までにあり，59 点であった生徒の順位は $\boxed{\text{イ}}$ までにある。$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～ⓓのうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪　1 から 1000	①　1001 から 2000	②　2001 から 3000
③　3001 から 4000	④　4001 から 5000	⑤　5001 から 6000
⑥　6001 から 7000	⑦　7001 から 8000	⑧　8001 から 9000
⑨　9001 から 10000	ⓐ　10001 から 11000	ⓑ　11001 から 12000
ⓒ　12001 から 13000	ⓓ　13001 から 14000	

科目 B の標準偏差は 16.0 点であったが，平均点が発表されなかったので，無作為に選ばれた 196 人の試験の点数をもとに平均点 m を推定することにした。196 人の平均点が 63.5 点であったとき，196 人の点数を十分に大きな標本と考えて m に対する信頼度 (信頼係数) 95 % の信頼区間を求めると，$\boxed{\text{ウエ}}.\boxed{\text{オ}}\leqq m\leqq\boxed{\text{カキ}}.\boxed{\text{ク}}$ となる。小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで答えよ。

$\boxed{22}$[2017 センター]

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて正規分布表を用いてもよい。

(1)　1 回の試行において，事象 A の起こる確率が p，起こらない確率が $1-p$ であるとする。この試行を n 回繰り返すとき，事象 A の起こる回数を W とする。確率変数 W の平均 (期待値) m が $\dfrac{1216}{27}$，標準偏差 σ が $\dfrac{152}{27}$ であるとき，$n=\boxed{\text{アイウ}}$，$p=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である。

(2)　(1) の反復試行において，W が 38 以上となる確率の近似値を求めよう。

いま　$P(W\geqq 38)=P\left(\dfrac{W-m}{\sigma}\geqq-\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}\right)$ と変形できる。ここで，

$Z=\dfrac{W-m}{\sigma}$ とおき，W の分布を正規分布で近似すると，正規分布表から確率の近似値は次のように求められる。

$$P\left(Z\geqq-\boxed{\text{キ}}.\boxed{\text{クケ}}\right)=0.\boxed{\text{コサ}}$$

(3)　連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $s\leqq x\leqq t$ で，確率密度関数が $f(x)$ のとき，X の平均 $E(X)$ は次の式で与えられる。

$$E(X)=\int_s^t xf(x)\,dx$$

a を正の実数とする。連続型確率変数 X のとり得る値 x の範囲が $-a\leqq x\leqq 2a$ で，確率密度関数が

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3a^2}(x+a) & (-a\leqq x\leqq 0 \text{ のとき})\\ \dfrac{1}{3a^2}(2a-x) & (0\leqq x\leqq 2a \text{ のとき})\end{cases}$$

であるとする。このとき，$a\leqq X\leqq\dfrac{3}{2}a$ となる確率は $\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

また，X の平均は $\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。さらに，$Y=2X+7$ とおくと，Y の平均は

$\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツ}}}+\boxed{\text{テ}}$ である。

$\boxed{23}$[2017 センター]

$0<p<1$ とする。袋の中に白球が p，赤球が $1-p$ の割合で，全部で m 個入っているものとする。

以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて正規分布表を用いてもよい。

(1)　$p=\dfrac{3}{5}$ とする。この袋の中から 1 個の球を取り出し袋の中へ戻すという試行を 4 回繰り返すとき，白球の出る回数を表す確率変数を W とする。W の平均 (期待値) は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$W$ の分散は $\dfrac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

さらに $X=$(白球の出る回数)$-$(赤球の出る回数) とするとき $X=\boxed{\text{ク}}W-\boxed{\text{ケ}}$ が成り立つ。

このことを利用して，X の平均は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$，$X$ の分散は $\dfrac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$ であることがわかる。

(2)　$m=10$，$p=\dfrac{3}{5}$ とする。この袋の中から同時に 4 個の球を取り出すとき，白球の個数を表す確率変数を Y とする。

このとき $P(Y=0)=\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チツテ}}}$，$P(Y=1)=\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナニ}}}$ である。同様に Y のとり得る他の値に対する確率を求めてから，Y の平均を計算すると $\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ であることがわかる。

(3)　以下では，p の値がわからないとする。

この袋の中から 1 個の球を取り出し袋の中へ戻すという試行を n 回繰り返す (以下，これを n 回の復元抽出という)。n 回の復元抽出を行ったとき，白球の出る回数を確率変数 W で表し，$R=\dfrac{W}{n}$ とおく。nが十分大きいとき，確率変数 R は近似的に平均 p，分散 $\dfrac{p(1-p)}{n}$ の正規分布に従う。W のとる値を w とし，$r=\dfrac{w}{n}$ とおくと，R が近似的に従う正規分布の分散 $\dfrac{p(1-p)}{n}$ を $\dfrac{r(1-r)}{n}$ で置き換えることにより，p に対する信頼度 (信頼係数) 95 % の信頼区間 $A\leqq p\leqq B$ を求めることができる。

このとき， $B-A$ を信頼区間の幅とよぶ。以下，信頼度 95 % を固定して考え，n は十分に大きいとする。

n 回の復元抽出を行って信頼区間を作るとき，信頼区間の幅が最大となる r の値は $r=0.\boxed{\text{ハ}}$ が得られたときである。このときの信頼区間の幅を L_1 とする。

また，n 回の復元抽出を行って，$r=0.8$ が得られたときの信頼区間の幅を L_2 とする。

このとき，$\dfrac{L_2}{L_1}=\boxed{\text{ヒ}}.\boxed{\text{フ}}$ である。