

1 [2017 大阪経済大]

次の式を展開せよ。ただし，i は虚数単位を表す。

(1) $(3-i)(4+5i)=\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}i$

(2) $i-i^2+i^3+i^4+i^5-i^6+i^7+i^8=\boxed{\text{ウ}}$

(3) $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-2i}=\dfrac{\boxed{\text{エ}}-i}{\boxed{\text{オ}}}$

2 [2015 駒澤大]

$\dfrac{5+10i}{1-3i}$ は $\dfrac{-\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}i}{2}$ となる。i は虚数単位とする。

3 [2015 立教大]

実数 x，y が $\dfrac{i}{1+xi}+\dfrac{x+2}{y+i}=0$ を満たすとき，$x=\boxed{\text{ア}}$，$y=\boxed{\text{イ}}$ である。ただし，i は虚数単位とする。

4 [2013 西南学院大]

2 乗して $7+24i$ となる複素数は，$\pm\left(\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}i\right)$ である。

5 [2001 大阪電気通信大]

2 次方程式 $2x^2-5x+4=0$ を解け．

6 [2013 三重大]

a，b を実数とし，i を虚数単位とする。2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解の 1 つが $1-\sqrt{2}\,i$ であるとき，次の問いに答えよ。

(1) a，b の値を求めよ。

(2) 2 次関数 $y=x^2+ax+b$ のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

7 [2007 静岡理工科大]

2 次方程式 $3x^2+ax+3=0$ が虚数解をもつとき，a の値の範囲を求めよ。また，解の 1 つが $x=\dfrac{-1-2\sqrt{2}\,i}{3}$ のとき，a の値を求めよ。ただし，a は実数であり，i は虚数単位である。

8 [1997 千葉工業大]

$x=3+2i\quad(i^2=-1)$ のとき，x^3-5x^2+7x+5 の値を求めよ．

9 [2012 甲南大]

2 次方程式 $x^2+2(a-\sqrt{3})x-3\sqrt{3}\,a+9=0$ が 2 つの異なる実数解をもち，$x^2+ax+1=0$ が虚数解をもつような a の値の範囲は $\boxed{\text{ア}}<a<\boxed{\text{イ}}$ である。

10 [2012 大阪工業大]

整式 x^3+2x^2+ax+b は $x-1$ で割り切れるが，$x+2$ で割ると 6 余る。

このとき，定数 a，b の値は $a=\boxed{\text{ア}}$ であり，$b=\boxed{\text{イ}}$ である。

11 [2005 近畿大]

x^3 の係数が 1 の 3 次式 $P(x)$ は $(x-1)^2$ で割ると $2x+3$ 余り，$x-2$ で割ると 4 余るという。このとき，$P(x)$ を求めよ。

12 [2017 福島大]

整式 $P(x)$ を x^2-2x+1 で割った余りが $x-2$ であり，$2x^2+3x+1$ で割った余りが $2x+3$ である。このとき，$P(x)$ を $2x^2-x-1$ で割った余りを求めよ。

13 [2014 中央大]

整式 $\mathrm{P}(x)$ を $x-2$ で割ると 3 余り，$x+3$ で割ると -7 余る。$\mathrm{P}(x)$ を $(x-2)(x+3)$ で割ったときの余りを求めよ。

14 [2015 東京電機大]

整式 $P(x)=3x^4-5x^3-3x^2+ax+b$ が x^2-x-2 で割り切れるとき，定数 a，b の値を求めよ。

15

次の方程式を解け。

(1) $x^4+x^2-2=0$　　(2) $x^3+x+2=0$

16 [2010 京都産業大]

x の 3 次方程式 $x^3-9x^2-25x+33=0$ の解を小さい順に並べると，$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$ である。

17 [2013 立教大]

3 次方程式 $x^3+2x^2-8x-21=0$ を解け。

18 [2017 龍谷大]

方程式 $x^4+3x^3-4x^2-3x+3=0$ ……① について，次の問いに答えよ。

(ア) $x=1$ および $x=-1$ が ① の解であることを示せ。

(イ) ① のすべての解を求めよ。

19 [2015 成蹊大]

3 次方程式 $x^3+ax^2+b=0$ が $x=1+2i$ を解にもつとき，実数の定数 a，b の値は，それぞれ $a=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$，$b=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

このとき，方程式の他の解は $x=1-2i$ と $x=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

20 [2015 琉球大]

3 次方程式 $x^3-ax-6=0$ が $x=-1$ を解にもつとき，定数 a の値と他の解を求めよ。

21 [2005 愛知工業大]

α を方程式 $z^3-27=0$ の実数でない解とするとき，$\alpha\overline{\alpha}$，$\alpha+\overline{\alpha}$ の値を求めよ。

ただし，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数である。

22 [2000 東北福祉大]

3 次方程式 $x^3-4x+2=0$ の 3 つの解を α，β，γ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\alpha-1$，$\beta-1$，$\gamma-1$ を 3 つの解とする 3 次方程式を求めよ．ただし，x^3 の係数は 1 とする．

(2) $\alpha\beta$，$\beta\gamma$，$\gamma\alpha$ を 3 つの解とする 3 次方程式を求めよ．ただし，x^3 の係数は 1 とする．

$\boxed{23}$ [2015 センター]

(1)　a，b を実数として，$P(x)=x^3+ax^2+bx-5$ とする。虚数 $1+2i$ が方程式 $P(x)=0$ の解であるとき，a，b の値と他の解を求めよう。

$P(1+2i)=\boxed{\text{アイウ}}-\boxed{\text{エ}}a+b+\left(\boxed{\text{オカ}}+\boxed{\text{キ}}a+2b\right)i$ となる。

$P(1+2i)=0$ であるから，$a=-\boxed{\text{ク}}$，$b=\boxed{\text{ケ}}$ であり

$P(x)=x^3-\boxed{\text{ク}}x^2+\boxed{\text{ケ}}x-5$ …… ① である。

このとき，① により，$P\left(\boxed{\text{コ}}\right)=0$ であるから，因数定理により

$P(x)=\left(x-\boxed{\text{コ}}\right)\left(x^2-\boxed{\text{サ}}x+\boxed{\text{シ}}\right)$ が成り立つ。したがって，$P(x)=0$ の $1+2i$ 以外の解は，$\boxed{\text{コ}}$ と $1-\boxed{\text{ス}}i$ である。

(2)　p を実数として，$Q(x)=x^3+px^2+px+1$ とする。方程式 $Q(x)=0$ は，異なる三つの負の実数解 α，β，γ をもつとする。ただし，$\alpha<\beta<\gamma$ とする。

α，β，γ が条件 $(\beta-\alpha):(\gamma-\beta)=3:2$ …… ② を満たすとき，三つの解 α，β，γ と p の値を求めよう。

$Q\left(-\boxed{\text{セ}}\right)=0$ であるから，因数定理により

$Q(x)=\left(x+\boxed{\text{セ}}\right)\left\{x^2+\left(p-\boxed{\text{ソ}}\right)x+1\right\}$ が成り立つ。

2 次方程式 $x^2+\left(p-\boxed{\text{ソ}}\right)x+1=0$ …… ③ が異なる二つの負の実数解をもつときの p のとり得る値の範囲は，$p>\boxed{\text{タ}}$ である。

解と係数の関係から，方程式 ③ の解の一つは絶対値が 1 より大きく，他の解の絶対値は 1 より小さい。したがって，$\beta=-\boxed{\text{セ}}$ であり，α と γ は方程式 ③ の解であることがわかる。解と係数の関係と条件 ② により $\alpha=-\dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$，$\gamma=-\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$，

$p=\dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

$\boxed{24}$ [2017 センター]

(1)　4 次方程式 $x^4+8x^3+20x^2+16x-12=0$ の解を求めよう。

$t=x^2+4x$ とおくと，この方程式は $t^2+\boxed{\text{ア}}t-12=0$ となる。

左辺を因数分解することにより，最初の 4 次方程式は

$\left(x^2+4x+\boxed{\text{イ}}\right)\left(x^2+4x-\boxed{\text{ウ}}\right)=0$ と表せる。

よって，その解は方程式 $x^2+4x+\boxed{\text{イ}}=0$ の二つの虚数解 $\boxed{\text{エオ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{カ}}}\,i$ と，

方程式 $x^2+4x-\boxed{\text{ウ}}=0$ の二つの実数解 $\boxed{\text{エオ}}\pm\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$ である。

(2)　虚数 $\alpha=-1+\sqrt{5}\,i$ に対して，α^3，α^4 を整数 p，q を用いて $p\alpha+q$ の形に表すことを考えよう。

α，および α と共役な複素数 $\beta=-1-\sqrt{5}\,i$ を解とする 2 次方程式の一つは

$x^2+\boxed{\text{ク}}x+\boxed{\text{ケ}}=0$ である。

よって，$\alpha^2=-\boxed{\text{ク}}\alpha-\boxed{\text{ケ}}$ から

$$\alpha^3=\alpha^2\cdot\alpha=-\boxed{\text{ク}}\alpha^2-\boxed{\text{ケ}}\alpha=\boxed{\text{コサ}}\alpha+\boxed{\text{シス}}$$

$$\alpha^4=\alpha^3\cdot\alpha=\boxed{\text{コサ}}\alpha^2+\boxed{\text{シス}}\alpha=\boxed{\text{セソ}}\alpha+\boxed{\text{タチ}}$$

である。

β についても同様にして，β^3，β^4 を整数 p，q を用いて $p\beta+q$ の形に表すと，

$\alpha^4+\beta^4=\boxed{\text{ツテ}}$ であることがわかる。

また，$\alpha^2=-\boxed{\text{ク}}\alpha-\boxed{\text{ケ}}$ から，$\dfrac{1}{\alpha}$，$\dfrac{1}{\alpha^2}$ は

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}\alpha-\frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

$$\frac{1}{\alpha^2}=\frac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハヒ}}}\alpha-\frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘホ}}}$$

となり，有理数 p，q を用いて $p\alpha+q$ の形に表すことができる。

$\boxed{25}$ [2010 センター]

a，b を実数とする。3 次式 $P(x)$ は，x^3 の係数が 1 であり，$P(1)=0$，$P(3)=a$，$P(5)=b$ を満たすとする。$P(1)=0$ であるから，$P(x)$ は 2 次式 $Q(x)$ を用いて $P(x)=\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)Q(x)$ と表される。$Q(x)$ を求めることで $P(x)$ を決定しよう。

$P(3)=a$，$P(5)=b$ より，$Q(x)$ は $Q(3)=\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$，$Q(5)=\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ を満たすことがわかる。これより，$Q(x)$ は 1 次式 $R(x)$ を用いて $Q(x)=(x-3)R(x)+\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ と表すことができて，$R(x)=x-\dfrac{a}{\boxed{\text{ク}}}+\dfrac{b}{\boxed{\text{ケ}}}-\boxed{\text{コ}}$ となる。したがって，

$Q(x)=x^2-\left(\dfrac{a}{\boxed{\text{サ}}}-\dfrac{b}{8}+\boxed{\text{シ}}\right)x+\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}a-\dfrac{3}{8}b+\boxed{\text{ソタ}}$ と求められる。

上で考えた $P(x)$ について，方程式 $P(x)=0$ が $\dfrac{1}{\alpha-4}+\dfrac{1}{\beta-4}=0$ を満たす二つの虚数解 α，β をもつとする。このとき，b は a を用いて $b=\boxed{\text{チ}}a$ と表され，a のとり得る値の範囲は $a>\boxed{\text{ツ}}$ である。