

1 [2009 大阪工業大]

平行四辺形 ABCD において，対角線 AC を 3 : 1 に内分する点を P，辺 BC を 3 : 2 に内分する点を Q とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{AC}$ を，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{DP}$ を，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ を用いて表せ。

(3) ベクトル $\overrightarrow{DQ}$ を，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AD}$ を用いて表せ。

2 [2013 立教大]

正六角形の頂点を反時計回りに A，B，C，D，E，F とする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ を用いて表せ。

3 [2010 水産大学校]

$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$ を用いて，$\vec{c}=(1,\ -1)$ が $k\vec{a}+m\vec{b}$ と表されるように定数 k，m を定めよ。

4 [2009 千葉工業大]

$\vec{a}=(2,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ -2)$ のとき，$(22,\ 7)={}^{ア}\square\,\vec{a}+{}^{イ}\square\,\vec{b}$ である。

5 [2009 千葉工業大]

$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$，$\vec{c}=(5,\ 6)$ とするとき，$\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{c}$ と平行になるような t の値は $\square$ である。

6 [2015 東京都市大]

2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ において，$\vec{a}+\vec{b}=(7,\ 2)$，$\vec{a}-2\vec{b}=(4,\ -7)$ のとき，$\vec{a}={}^{ア}\square$，$\vec{b}={}^{イ}\square$ となる。また，$|-\vec{a}+3\vec{b}|={}^{ウ}\square$ となる。

7 [2003 小樽商科大]

O (0, 0)，A (1, 3)，B (2, 1)，$\overrightarrow{OA'}=3\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$ とする．このとき直線 AB′ と直線 A′B の交点の座標を求めよ．

8 [2008 愛媛大]

ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}+2\vec{b}|=2\sqrt{3}$ を満たすとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}={}^{ア}\square$ である。また，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta={}^{イ}\square$ となる。

9 [2012 琉球大]

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるとき，$|\vec{a}-3\vec{b}|$ を求めよ。

10 [2012 愛媛大]

$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$ である 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$\vec{a}+\vec{b}$ と $2\vec{a}+3\vec{b}$ が垂直であるとする。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

11 [2006 青山学院大]

ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が 30° で，かつ $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$ であるとする。このとき，$\vec{a}\cdot\vec{b}={}^{ア}\square$，$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(3\vec{a}+2\vec{b})={}^{イ}\square$，$|\vec{a}-\sqrt{3}\,\vec{b}|={}^{ウ}\square$ である。

12 [2015 国士舘大]

ベクトル $\vec{a}=(-1,\ x)$，$\vec{b}=(-4,\ 3)$ に対し，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $2\vec{a}+\vec{b}$ とベクトル $\vec{a}-\vec{b}$ が平行になるような x の値は $x={}^{ア}\square$ である。

(2) ベクトル $2\vec{a}+\vec{b}$ とベクトル $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるような x の値は $x={}^{イ}\square$ と ${}^{ウ}\square$ である。ただし，${}^{イ}\square<{}^{ウ}\square$ である。

13 [2004 工学院大]

$\vec{a}=(2,\ 0)$，$\vec{b}=(x,\ 2)$，$\vec{c}=(3,\ 4)$ とする．

$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角と，$\vec{b}$，$\vec{c}$ のなす角が等しいとき，x の値を求めよ．

14 [2014 成蹊大]

$\vec{a}=(-7,\ 4)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ と実数 t に対して，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は $t={}^{ア}\square$ のとき最小値 $\sqrt{{}^{イ}\square}$ をとる。

15 [2017 東京都市大]

ベクトル $\vec{a}=(1,\ 1)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$ に対し，$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ とおく。実数 t が $0\leqq t\leqq 1$ を満たしながら動くとき，$|\vec{p}|$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ。

16 [1999 創価大]

$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 1)$ のとき，ベクトル $\vec{p}$ を $\vec{p}=k\vec{a}+(2-k)\vec{b}$ とする．$2\leqq k\leqq 4$ に対する $\vec{p}$ の大きさ $|\vec{p}|$ の最大値を求めよ．

17 [2002 福岡大]

四角形 OABC において，三角形 OAB の重心を P，三角形 OBC の重心を Q とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする．このとき，$\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて $\overrightarrow{PQ}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ と表すと，$z={}^{ア}\square$ である．また，$\angle AOC=60^\circ$，OA=3，OC=2 のとき $|\overrightarrow{PQ}|={}^{イ}\square$ である．

18 [2014 大阪工業大]

平行四辺形 OABC について，辺 AB の中点を P，辺 BC を 3 : 2 に内分する点を Q，直線 PQ と直線 OC の交点を R，△OPQ の重心を G とする。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{OP}={}^{ア}\square\,\overrightarrow{OA}+{}^{イ}\square\,\overrightarrow{OC}$ となる。

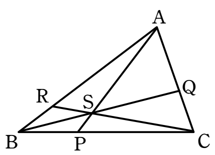
(2) $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{OQ}={}^{ウ}\square\,\overrightarrow{OA}+{}^{エ}\square\,\overrightarrow{OC}$ となる。

(3) $\overrightarrow{OR}$ を $\overrightarrow{OC}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{OR}={}^{オ}\square\,\overrightarrow{OC}$ となる。

(4) $\overrightarrow{OG}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{OG}={}^{カ}\square\,\overrightarrow{OA}+{}^{キ}\square\,\overrightarrow{OC}$ となる。

19 [2004 東京都立大]

三角形 ABC がある．辺 BC を 1 : 2 に内分する点を P，CA を 2 : 3 に内分する点を Q，線分 AP と線分 BQ の交点を S とする．直線 CS と辺 AB の交点を R とする．



(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ で表せ.

(2) $\overrightarrow{AS}$ を $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ で表せ.

(3) R は辺 AB をどのように内分するか.

20 [2012 摂南大]

三角形 ABC の辺 BC の中点を M とし，線分 AM 上に $\overrightarrow{AP}=\frac{4}{11}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$ を満たすように点 P をとる。点 P が線分 AM を $m:n$ に内分するような m，n の組を求めよ。

21 [2013 昭和薬科大]

△OAB の辺 OA を 2 : 1 に内分する点を C，辺 OB を 3 : 2 に内分する点を D，AD と BC の交点を E とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

22 [2005 東京電機大]

△OAB の辺 AB を 2 : 3 に内分する点を P とするとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

23 [2012 東京電機大]

平行四辺形 OACB において，線分 AB を 3 : 1 に内分する点を D とし，直線 OD と直線 BC との交点を E とする。$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ とおくとき，$\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

24 [2014 福岡大]

台形 ABCD において AD∥BC，BC=3，AD=1 とし，△BCD の重心を P，△BDA の重心を Q とする。$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BA}=\vec{b}$ とし，$\overrightarrow{BP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと $\overrightarrow{BP}={}^{ア}\square$ であり，$\overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表すと $\overrightarrow{PQ}={}^{イ}\square$ である。

$\boxed{25}$ [2008 南山大]

$\triangle$ABC の内部に点 P があり，辺 AC を 3 : 1 に内分する点を M とする。$\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ で表せ。また，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ が成立するとき，$\triangle$PAB の面積 S_1，$\triangle$PBC の面積 S_2，$\triangle$PCA の面積 S_3 の比 $S_1 : S_2 : S_3$ を求めよ。

$\boxed{26}$ [2007 香川大]

$\triangle$OAB において，OA : OB = 2 : 3 であり，辺 OB 上の点 D は OD = OA を満たしている。$\angle$AOB の二等分線と AD，AB の交点をそれぞれ E，F とし，AB の中点を M とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。 (2) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。 (4) $\dfrac{\mathrm{AM}}{\mathrm{FM}}$ を求めよ。

$\boxed{27}$ [2005 東北学院大]

O を原点，A を定点 (3, 0) とする。点 P $(x,\ y)$ が条件

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$$

を満たすように動くとき，点 P の描く軌跡の方程式を求めよ。

$\boxed{28}$ [2007 湘南工科大]

2 つのベクトル $\vec{a}=(0,\ 2)$，$\vec{d}=(1,\ 2)$ がある。定点 A $(\vec{a})$ を通り，$\vec{d}$ に平行な直線の方程式を求めよ。

$\boxed{29}$ [2008 京都産業大]

座標平面上に原点 O と点 A (0, 2) がある。点 P $(x,\ y)$ が $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|$ を満たしながら動くとき，点 P の軌跡を表す方程式を x，y で表せ。

$\boxed{30}$ [2003 千葉工業大]

座標平面上に 3 点 O (0, 0)，A (0, 5)，B (6, 2) をとり，点 P を
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ （t は実数）によって定める．
$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ は $t=\,^{\text{ア}}\boxed{\quad}$ のときに最小となり，最小値は $^{\text{イ}}\boxed{\quad}$ である．
また，t が $0\leqq t\leqq 1$ の範囲を動くとき，P が描く図形の長さは $^{\text{ウ}}\boxed{\quad}$ である．

$\boxed{31}$ [1997 山梨大]

座標平面上に 3 点 O (0, 0), A (2, 3), B (6, 1) がある．点 P の位置が実数 s, t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表されている．次のそれぞれの場合について，点 P の位置または存在範囲を図示し，その理由を説明せよ．

(1) $s=\dfrac{1}{2}, t=\dfrac{1}{2}$

(2) $s+t=1, s\geqq 0, t\geqq 0$

(3) $2s+3t\leqq 1, s\geqq 0, t\geqq 0$

(4) $s+t=2, st<0$

$\boxed{32}$ [2004 東北学院大]

xy 平面上の点 A (0, 0)，B $(b,\ 0)$ に対して，

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-2\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right)=0$$

を満たす xy 平面上の点 P $(x,\ y)$ の描く図形の方程式を求めよ．

$\boxed{33}$ [2004 広島工業大]

原点 O (0, 0) と点 A (4, 2) がある．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ が垂直であるような点 P の軌跡を求めよ．

$\boxed{34}$ [2014 琉球大]

$\triangle$ABC において，辺 AB を 2 : 1 に内分する点を D，辺 AC を 3 : 1 に内分する点を E とし，線分 CD，BE の交点を P とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(2) AB = 3，AC = 4，AP = $\sqrt{7}$ のとき，$\angle$BAC の大きさを求めよ。

$\boxed{35}$ [1997 福井工業大]

$\triangle$ABC の辺 BC, CA をそれぞれ 2 : 1 の比に内分する点を D, E とし，また，線分 AD を 3 : 4 の比に内分する点を F とする．このとき，3 点 B, F, E は同一直線上にあることを証明し，BF : FE を求めよ．

$\boxed{36}$ [2007 芝浦工業大]

半径 1 の円に内接する $\triangle$ABC において，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|=\dfrac{6}{5}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1$ とする。

$\sin A=\,^{\text{ア}}\boxed{\quad}$ であり，$\triangle$ABC の面積は $^{\text{イ}}\boxed{\quad}$ である。

$\boxed{37}$ [2002 福岡大]

平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $\left|\vec{a}\right|=3$，$\left|\vec{b}\right|=2\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{15}{2}$ を満たしている．

$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおくとき，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{3}{2}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=3$ となる x，y の値の組は $(x,\ y)=\,^{\text{ア}}\boxed{\quad}$ である．また，このとき，原点 O と点 B$(\vec{b})$，点 C$(\vec{c})$ を頂点とする三角形 OBC の面積は $^{\text{イ}}\boxed{\quad}$ である．

$\boxed{38}$ [2003 香川大]

座標平面上に 3 点 A $(1,\ \sqrt{3})$，B $(-1,\ \sqrt{3})$，P $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ がある．ただし，$-90^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$ とする．$\triangle$ABP の頂点 P から辺 AB に下ろした垂線を PH とする．

(1) $\triangle$ABP の面積を θ を用いて表せ．

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を θ を用いて表せ．

(3) $\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ のとき，θ の値を求めよ．

(4) PB = 3 のとき，$\triangle$ABP の面積および $\angle$BPH を求めよ．

$\boxed{39}$ [2017 センター]

座標平面上に点 A (2, 0) をとり，原点 O を中心とする半径が 2 の円周上に点 B，C，D，E，F を，点 A，B，C，D，E，F が順に正六角形の頂点となるようにとる。ただし，B は第 1 象限にあるとする。

(1) 点 B の座標は $\left(\boxed{\text{ア}},\ \sqrt{\boxed{\text{イ}}}\right)$，点 D の座標は $\left(-\boxed{\text{ウ}},\ 0\right)$ である。

(2) 線分 BD の中点を M とし，直線 AM と直線 CD の交点を N とする。$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を求めよう。

$\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ は実数 r，s を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+r\overrightarrow{\mathrm{AM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と 2 通りに表すことができる。ここで $\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\left(-\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\left(\boxed{\text{ク}},\ \sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\right)$ であるから $r=\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$，$s=\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である。

よって $\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\left(-\dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}},\ \dfrac{\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{\boxed{\text{ツ}}}\right)$ である。

(3) 線分 BF 上に点 P をとり，その y 座標を a とする。点 P から直線 CE に引いた垂線と，点 C から直線 EP に引いた垂線との交点を H とする。

$\overrightarrow{\mathrm{EP}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{EP}}=\left(\boxed{\text{テ}},\ \boxed{\text{ト}}+\sqrt{\boxed{\text{ナ}}}\right)$ と表せることにより，H の座標を a を用いて表すと $\left(\dfrac{\boxed{\text{ニ}}a^{\boxed{\text{ヌ}}}+\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}},\ \boxed{\text{ハ}}\right)$ である。

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ のなす角を θ とする。$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$ のとき，a の値は

$a=\pm\dfrac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フヘ}}}$ である。

$\boxed{40}$［2015 センター］

1 辺の長さが 1 のひし形 OABC において，$\angle\mathrm{AOC}=120^\circ$ とする。辺 AB を 2 : 1 に内分する点を P とし，直線 BC 上に点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ となるようにとる。以下，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。

(1)　三角形 OPQ の面積を求めよう。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}}\vec{b}$ である。実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表されるので，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boxed{\text{エ}}\,t\vec{a}+\vec{b}$ である。ここで，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boxed{\text{キ}}$ であることから，$t=\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ である。

これらのことから，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シス}}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

よって，三角形 OPQ の面積 S_1 は，$S_1=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}}}{\boxed{\text{チツ}}}$ である。

(2)　辺 BC を 1 : 3 に内分する点を R とし，直線 OR と直線 PQ との交点を T とする。$\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表し，三角形 OPQ と三角形 PRT の面積比を求めよう。

T は直線 OR 上の点であり，直線 PQ 上の点でもあるので，実数 r，s を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=r\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と表すと，$r=\dfrac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$，$s=\dfrac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ となることがわかる。よって，$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\dfrac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{ノハ}}}\vec{a}+\dfrac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}}\vec{b}$ である。

上で求めた r，s の値から，三角形 OPQ の面積 S_1 と，三角形 PRT の面積 S_2 との比は，$S_1 : S_2=\boxed{\text{ヘホ}} : 2$ である。

$\boxed{41}$［2015 センター］

平面上の四角形 OABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，
$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$ であるとする。点 P が

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\frac{5}{4}\qquad\cdots\cdots\ ①$$

を満たしながら動くとき，三角形 OCP の面積の最小値を求めよう。以下，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とおく。

まず，点 P の動く範囲を考えよう。① は，$(\vec{a}-\vec{p})\cdot(\vec{b}-\vec{p})=\dfrac{5}{4}$ であるから，

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\boxed{\text{ア}}$ に注意すると $|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{p}+\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}=0$ と書き換えられる。

これはさらに $\left|\vec{p}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{\boxed{\text{エ}}}\right|=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ と書き換えられる。点 M を $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{\boxed{\text{エ}}}$ となるように定めると，点 P は，M を中心とする半径 $\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ の円周上を動く。

次に，点 P と直線 OC の距離について考えよう。直線 OC 上の点 H を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MH}}$ となるようにとる。実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と表すと，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MH}}=\boxed{\text{カ}}$ であることから，$t=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ となる。このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{MH}}|=\dfrac{\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$ であるから，点 P が ① を満たしながら動くとき，点 P と直線 OC の距離の最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ となる。

したがって，三角形 OCP の面積の最小値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である。