

1 [2017 神戸大]

$\vec{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$，$\vec{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$，$\vec{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$ とする。座標空間内の動点Pが原点Oから出発し，正四面体のさいころ(1，2，3，4の目がそれぞれ確率 $\frac{1}{4}$ で出る)を振るごとに，出た目が k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ のときは $\vec{v_k}$ だけ移動する。すなわち，さいころを n 回振った後の動点Pの位置を P_n として，さいころを $(n+1)$ 回目に振って出た目が k ならば $\overrightarrow{P_nP_{n+1}}=\vec{v_k}$ である。ただし，$P_0=O$ である。

(1) 点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ。

(2) $\overrightarrow{P_0P_2}\perp\overrightarrow{P_2P_4}$ となる確率を求めよ。

(3) 4点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率を求めよ。

(4) n を6以下の自然数とする。$P_n=O$ となる確率を求めよ。

2 [2017 京都大]

四面体OABCを考える。点D，E，F，G，H，Iは，それぞれ辺OA，AB，BC，CO，OB，AC上にあり，頂点ではないとする。

(1) $\overrightarrow{DG}$ と $\overrightarrow{EF}$ が平行ならばAE : EB＝CF : FBであることを示せ。

(2) D，E，F，G，H，Iが正八面体の頂点となっているとき，これらの点はOABCの各辺の中点であり，OABCは正四面体であることを示せ。

3 [2017 慶応義塾大]

点Oを中心とする半径 r の球面上に3点A，B，Cがあり，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2$ であるとする。また，3点A，B，Cを通る平面を α とし，点Oは平面 α 上にないとする。更に，△ABCの重心をGとし，直線OG上に点Dがあり，線分DGの中点が点Oであるとする。

(1) △ABCの面積は $^{ア}\boxed{}$ であり，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}={}^{イ}\boxed{}$ である。

(2) 点Pの位置ベクトルは $\overrightarrow{OP}=-3\overrightarrow{OA}+x\overrightarrow{OB}+y\overrightarrow{OC}$ (x，y は実数)と表され，かつ直線OPは平面 α に直交しているとする。このとき，$x={}^{ウ}\boxed{}$，$y={}^{エ}\boxed{}$ である。いま，t を実数とし，点Hを $\overrightarrow{DH}=t\overrightarrow{OP}$ によって決まる点とすると，$\overrightarrow{AH}={}^{オ}\boxed{}\,\overrightarrow{OA}+{}^{カ}\boxed{}\,\overrightarrow{OB}+{}^{キ}\boxed{}\,\overrightarrow{OC}$ である。更に，点Hが平面 α 上にあるとすると，$t={}^{ク}\boxed{}$ である。

(3) 四面体ABCDの体積は $^{ケ}\boxed{}$ である。

4 [2015 一橋大]

xyz 空間において，原点を中心とする xy 平面上の半径1の円周上を点Pが動き，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ を中心とする xz 平面上の半径1の円周上を点Qが動く。

(1) 線分PQの長さの最小値と，そのときの点P，Qの座標を求めよ。

(2) 線分PQの長さの最大値と，そのときの点P，Qの座標を求めよ。

5 [2017 京都大]

座標空間において原点Oと点A $(0,\ -1,\ 1)$ を通る直線を ℓ とし，点B $(0,\ 2,\ 1)$ と点C $(-2,\ 2,\ -3)$ を通る直線を m とする。ℓ 上の2点P，Qと，m 上の点Rを△PQRが正三角形となるようにとる。このとき，△PQRの面積が最小となるようなP，Q，Rの座標を求めよ。

6 [2017 名古屋大]

xyz 空間の2点A $(0,\ 0,\ 2)$，P $(a,\ b,\ 0)$ を通る直線を ℓ とする。また，点 $(2,\ 0,\ 0)$ を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し，S のうち z 座標が $z>0$ を満たす部分を T とする。

(1) ℓ 上に点Qがある。実数 t を $\overrightarrow{AQ}=t\overrightarrow{AP}$ で定めるとき，点Qの座標を a，b，t を使って表せ。

(2) ℓ が S と相異なる2点で交わるような実数 a，b に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

(3) ℓ が T と相異なる2点で交わるような実数 a，b に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

7 [2017 横浜国立大]

空間に2つの定点O，Aがあり，$|\overrightarrow{OA}|=2$ を満たしている。また，2点P，Qは次の条件を満たしながら動く。

$$|\overrightarrow{OP}|\leqq 5,\ \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=6$$
$$|\overrightarrow{OQ}|=\sqrt{5},\ \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}=-2$$

ただし，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}$ は $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OA}$ の内積を表す。

(1) $|\overrightarrow{OP}|$ の最小値を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{PQ}|$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 線分PQが通過してできる部分の体積を求めよ。

8 [2012 一橋大]

xyz 空間内の平面 $z=2$ 上に点Pがあり，平面 $z=1$ 上に点Qがある。直線PQと xy 平面の交点をRとする。

(1) P $(0,\ 0,\ 2)$ とする。点Qが平面 $z=1$ 上で点 $(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径1の円周上を動くとき，点Rの軌跡の方程式を求めよ。

(2) 平面 $z=1$ 上に4点A $(1,\ 1,\ 1)$，B $(1,\ -1,\ 1)$，C $(-1,\ -1,\ 1)$，D $(-1,\ 1,\ 1)$ をとる。点Pが平面 $z=2$ 上で点 $(0,\ 0,\ 2)$ を中心とする半径1の円周上を動き，点Qが正方形ABCDの周上を動くとき，点Rが動きうる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。

9 [2011 京都大]

xyz 空間で，原点Oを中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と3点 $(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$ を通る平面 α が共有点をもつことを示し，点 $(x,\ y,\ z)$ がその共有点全体の集合を動くとき，積 xyz がとりうる値の範囲を求めよ。