

1 ［2011 福島県立医科大］

(1) すべての自然数 n と整数 k $(0\leqq k\leqq n-1)$ について，

$2\cdot {}_{2n}C_{n+k}+{}_{2n}C_{n+k+1}+{}_{2n}C_{n+k-1}={}_{2(n+1)}C_{n+k+1}$ が成り立つことを示せ。

(2) x は実数とする。すべての自然数 n について，

$2^{2n}\cdot\cos^{2n}x={}_{2n}C_n+2\sum_{k=1}^{n}{}_{2n}C_{n+k}\cos 2kx$ が成り立つことを示せ。

2 ［2017 早稲田大］

n を正の整数とする。次の条件 (*) を満たす x についての n 次式 $P_n(x)$ を考える。

(*) すべての実数 θ に対して，$\cos n\theta=P_n(\cos\theta)$

(1) $n\geqq 2$ のとき，$P_{n+1}(x)$ を $P_n(x)$ と $P_{n-1}(x)$ を用いて表せ。

(2) $P_n(x)$ の x^n の係数を求めよ。

(3) $\cos\theta=\dfrac{1}{10}$ とする。$10^{1000}\cos^2(500\theta)$ を 10 進法で表したときの，一の位の数字を求めよ。

3 ［2017 一橋大］

xy 平面上の直線 $x=y+1$ を k，yz 平面上の直線 $y=z+1$ を ℓ，xz 平面上の直線 $z=x+1$ を m とする。直線 k 上に点 $P_1(1,\ 0,\ 0)$ をとる。ℓ 上の点 P_2 を $P_1P_2\perp\ell$ となるように定め，m 上の点 P_3 を $P_2P_3\perp m$ となるように定め，k 上の点 P_4 を $P_3P_4\perp k$ となるように定める。以下，同様の手順で ℓ，m，k，ℓ，m，k，…… 上の点 P_5，P_6，P_7，P_8，P_9，P_{10}，…… を定める。

(1) 点 P_2，P_3 の座標を求めよ。

(2) 線分 P_nP_{n+1} の長さを n を用いて表せ。

4 ［2013 大阪大］

n を 3 以上の整数とする。n 個の球 K_1，K_2，……，K_n と n 個の空(から)の箱 H_1，H_2，……，H_n がある。次のように，K_1，K_2，……，K_n の順番に，球を箱に 1 つずつ入れていく。

まず，球 K_1 を箱 H_1，H_2，……，H_n のどれか 1 つに無作為に入れる。次に，球 K_2 を箱 H_2 が空ならば箱 H_2 に入れ，箱 H_2 が空でなければ残りの $n-1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる。

一般に，$i=2$，3，……，n について，球 K_i を，箱 H_i が空ならば箱 H_i に入れ，箱 H_i が空でなければ残りの $n-i+1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる。

(1) K_n が入る箱は H_1 または H_n である。これを証明せよ。

(2) K_{n-1} が H_{n-1} に入る確率を求めよ。

5 ［2017 東北大］

n を負でない整数とする。

(1) $2x+2y+z=n$ を満たす負でない整数 x，y，z の組の総数を，$n=4$ と $n=5$ のそれぞれの場合に求めよ。

(2) $2x+2y+z=n$ を満たす負でない整数 x，y，z の組の総数を，n を用いて表せ。

(3) $2x+2y+z\leqq n$ を満たす負でない整数 x，y，z の組の総数を，n を用いて表せ。

6 ［2015 東北大］

$k\geqq 2$ と n を自然数とする。n が k 個の連続する自然数の和であるとき，すなわち，$n=m+(m+1)+\cdots+(m+k-1)$ が成り立つような自然数 m が存在するとき，n を k-連続和とよぶことにする。ただし，自然数とは 1 以上の整数のことである。

(1) n が k-連続和であることは，次の条件 (A)，(B) の両方が成り立つことと同値であることを示せ。

(A) $\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}$ は整数である。

(B) $2n>k^2$ が成り立つ。

(2) f を自然数とする。$n=2^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k\geqq 2$ は存在しないことを示せ。

(3) f を自然数とし，p を 2 でない素数とする。$n=p^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k\geqq 2$ の個数を求めよ。

7 ［2004 大阪大］

実数 a，r に対し数列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{cases} x_1=a \\ x_{n+1}=rx_n(1-x_n) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots) \end{cases}$$

で定める.

(1) すべての n について $x_n=a$ となるような a を求めよ.

(2) $x_2\fallingdotseq a$，$x_3=a$ となるような a の個数を求めよ.

(3) $0\leqq a\leqq 1$ となるすべての a について $0\leqq x_n\leqq 1$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ が成り立つような r の範囲を求めよ.

8 ［2013 京都大］

N を 2 以上の自然数とし，a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を次の性質 (A)，(B) を満たす数列とする。

(A) $a_1=2^N-3$,

(B) $n=1$，2，…… に対して，

a_n が偶数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$，a_n が奇数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{2}$。

このときどのような自然数 M に対しても

$$\sum_{n=1}^{M}a_n\leqq 2^{N+1}-N-5$$

が成り立つことを示せ。

9 ［2011 早稲田大］

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

(i) $a_1=0$

(ii) $n=2$，3，4，…… に対し，

$a_{n-1}\geqq n$ のとき，$a_n=a_{n-1}-n$

$a_{n-1}<n$ のとき，$a_n=a_{n-1}+n$

(1) a_7 を求めよ。

(2) $a_k=k$ のとき，条件 $m>k$，$a_m=m$ を満たす最小の整数 m を k で表せ。

(3) a_{2011} を求めよ。