

$\boxed{1}$［2010 東北大］

$f(x)=x^3$ とする。

(1) $0 \leqq a < x < y$ を満たすすべての a，x，y に対して

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

が成り立つことを示せ。

(2) $y < x < b$ を満たすすべての x，y に対して

$$f(x) > \frac{(x-y)f(b)+(b-x)f(y)}{b-y}$$

が成り立つような b の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$［2017 防衛医科大学校］

多項式 $f(x)=(x-\sqrt{c})^{2n+1}(x+\sqrt{c})^{2n}(x^2+c)^{2n}$ の x^k の係数を a_k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 8n+1)$ とする。ここで n は自然数，c は正の実数とする。

(1) $c=4$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{8n+1} a_k$ はいくらか。

(2) $c=2$，$n=17$ のとき，a_k が最大となる k はいくらか。

$\boxed{3}$［2017 一橋大］

$P(0)=1$，$P(x+1)-P(x)=2x$ を満たす整式 $P(x)$ を求めよ。

$\boxed{4}$［2014 中央大］

(1) n を正の整数とする。$(1+a)^n$ を二項定理を用いて展開せよ。

(2) 21^{10} を 400 で割ったときの余りを求めよ。

(3) 19^n+21^n が 400 で割り切れるような正の整数 n が存在するか。存在するならば，その例を示せ。存在しなければ，それを証明せよ。

$\boxed{5}$［2012 名古屋大］

m，p を 3 以上の奇数とし，m は p で割り切れないとする。

(1) $(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。

(2) $(p-1)^m+1$ は p で割り切れることを示せ。

(3) $(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れないことを示せ。

(4) r を正の整数とし，$s=3^{r-1}m$ とする。2^s+1 は 3^r で割り切れることを示せ。

$\boxed{6}$［2013 東北大］

$a \geqq 1$ を満たす実数 a に対して，2 つの放物線 C：$y=x^2-ax-a$ と D：$y=ax^2+ax$ を考える。

(1) 2 つの放物線 C と D が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ。

(2) a が (1) で求めた範囲にあるとき，C と D の 2 つの交点を通る直線の傾きを m とする。m が最大になるように a の値を定め，そのときの m の値を求めよ。

$\boxed{7}$［2013 一橋大］

(1) 正の実数 x，y，z が $x^2=y^2+z$ を満たすとき，$y < x < y+\dfrac{z}{2y}$ が成り立つことを示せ。

(2) $x^2=y^2+8\sqrt{2y-1}$ を満たす正の整数 x，y の組をすべて求めよ。

$\boxed{8}$［2012 神戸大］

(1) 正の実数 x，y に対して $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y} \geqq 2$ が成り立つことを示し，等号が成立するための条件を求めよ。

(2) n を自然数とする。n 個の正の実数 a_1，$\cdots\cdots$，a_n に対して

$$(a_1+\ \cdots\cdots\ +a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\ \cdots\cdots\ +\frac{1}{a_n}\right) \geqq n^2$$

が成り立つことを示し，等号が成立するための条件を求めよ。

$\boxed{9}$［2013 名古屋大］

k，m，n は整数とし，$n \geqq 1$ とする。${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数として，$S_k(n)$，$T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots\cdots+n^k, \qquad S_k(1)=1 \ (k \geqq 0)$$

$$T_m(n)={}_m\mathrm{C}_1S_1(n)+{}_m\mathrm{C}_2S_2(n)+{}_m\mathrm{C}_3S_3(n)+\cdots\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}S_{m-1}(n)$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}{}_m\mathrm{C}_kS_k(n) \ (m \geqq 2)$$

(1) $T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。

(2) 一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。

(3) p が 7 以上の素数のとき，$S_1(p-1)$，$S_2(p-1)$，$S_3(p-1)$，$S_4(p-1)$ は p の倍数であることを示せ。

$\boxed{10}$［2010 大阪大］

p は素数，r は正の整数とする。

(1) x_1，x_2，$\cdots\cdots$，x_r についての式 $(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)^p$ を展開したときの単項式 $x_1^{\,p_1}x_2^{\,p_2}\cdots\cdots x_r^{\,p_r}$ の係数を求めよ。ここで，p_1，p_2，$\cdots\cdots$，p_r は 0 または正の整数で $p_1+p_2+\cdots\cdots+p_r=p$ を満たすとする。

(2) x_1，x_2，$\cdots\cdots$，x_r が正の整数のとき，

$$(x_1+x_2+\cdots\cdots+x_r)^p-(x_1^{\,p}+x_2^{\,p}+\cdots\cdots+x_r^{\,p})$$

は p で割り切れることを示せ。

(3) r は p で割り切れないとする。このとき，$r^{p-1}-1$ は p で割り切れることを示せ。