

1 [2017 早稲田大]

整数係数の 3 次多項式 $f(x)$ が $f(0)=1$ かつ $f\left(\cos\dfrac{\pi}{7}\right)=0$ を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

2 [2017 慶応義塾大]

a，x，y は実数の定数とし，$0<a<1$，$0\leqq y<2\pi$ を満たすとする。複素数 z を $z=a^x\cos y+(a^x\sin y)i$ によって定める。ただし，i は虚数単位である。

(1) $z\overline{z}$ と z^2 のそれぞれの実部と虚部を求めよ。ただし，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。

(2) $x=0$ のとき，$z^2+\overline{z}=0$ を満たす y の値をすべて求めよ。

(3) $\overline{z}$ の実部が $\overline{z}$ の虚部より大きくなるような x と y の値の範囲を求めよ。

(4) 複素数 w を $w=\log_a(a^x\cos y)+\{\log_a(a^x\sin y)\}i$ によって定める。w の実部が w の虚部より大きくなるような x と y の値の範囲を求めよ。

3 [2017 東北大]

a を実数とする。$z=x+yi$ (x，y は実数) を複素数とし，$\overline{z}=x-yi$ とするとき，等式 $z^3=\overline{z}+a$ ……(＊) を考える。ここで i は虚数単位を表す。

(1) $a=0$ のとき，(＊) を満たす z をすべて求めよ。

(2) (＊) を満たす z がちょうど 5 個存在するような a の値の範囲を求めよ。

4 [2015 名古屋大]

(1) $\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha)=0$ となるもののうち，x^4 の係数が 1 であるものを求めよ。

(2) 8 つの実数 $\pm\sqrt{13}\pm\sqrt{9+2\sqrt{17}}\pm\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ (ただし，複号 $\pm$ はすべての可能性にわたる) の中で，(1) で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x)=0$ の解となるものをすべて求め，それ以外のものが解でないことを示せ。

(3) (2) で求めた $f(x)=0$ の解の大小関係を調べ，それらを大きい順に並べよ。

5 [2012 京都大]

(1) $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ。

(2) $P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする。このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ。

6 [2010 旭川医科大]

(1) 整数を係数とする n 次方程式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

が有理数の解 $\dfrac{\beta}{\alpha}$ (α と β は互いに素な整数とする) をもつとき，α は a_0 の約数であり β は a_n の約数であることを示せ。

(2) 素数 p に対して，

$$x+y+z=\frac{p}{3},\quad xy+yz+zx=\frac{1}{p},\quad xyz=\frac{1}{p^3}$$

を満たす x，y，z がすべて正の有理数であるとき，p および x，y，z を求めよ。

7 [2011 名古屋大]

a，b は $a\geqq b>0$ を満たす整数とし，x と y の 2 次方程式

$$x^2+ax+b=0,\quad y^2+by+a=0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1) $a=b$ とするとき，条件を満たす整数 a の値をすべて求めよ。

(2) $a>b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。

8 [2010 一橋大]

実数 p，q，r に対して，3 次多項式 $f(x)$ を $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ と定める。実数 a，c，および 0 でない実数 b に対して，$a+bi$ と c はいずれも方程式 $f(x)=0$ の解であるとする。ただし，i は虚数単位を表す。

(1) $y=f(x)$ のグラフにおいて，点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きを $s(a)$ とし，点 $(c,\ f(c))$ における接線の傾きを $s(c)$ とする。$a\fallingdotseq c$ のとき，$s(a)$ と $s(c)$ の大小を比較せよ。

(2) 更に，a，c は整数であり b は 0 でない整数であるとする。次を証明せよ。

(ア) p，q，r はすべて整数である。

(イ) p が 2 の倍数であり，q が 4 の倍数であるならば，a，b，c はすべて 2 の倍数である。