

1 [2012 早稲田大]

$a>0$，$a \fallingdotseq 1$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 正の実数 x，y に対して，$\log_a \dfrac{x+y}{2}$ と $\dfrac{1}{2}(\log_a x+\log_a y)$ の大小関係を調べよ。

(2) 実数 x，y に対して，$\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$ が成り立つとき，$\dfrac{1}{x}$ および $\dfrac{1}{y}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) (2) において，$k=2x+y$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(4) $\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$ を満たす整数 x，y の組をすべて求めよ。

2 [2017 慶応義塾大]

x と y は方程式 $\log_2 7+\log_{\frac{1}{2}}(y+5)=2-\log_2(x+2)$ を満たす。

(1) $y=3$ のとき，$x=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(2) x と y が整数で，不等式 $1000<2^{y-x}<5000$ を満たすとき，$x=\boxed{\text{ウ}}$，$y=\boxed{\text{エ}}$ である。

3 [2010 大阪大]

連立方程式 $\begin{cases} 2^x+3^y=43 \\ \log_2 x-\log_3 y=1 \end{cases}$ を考える。

(1) この連立方程式を満たす自然数 x，y の組を求めよ。

(2) この連立方程式を満たす正の実数 x，y は，(1) で求めた自然数の組以外に存在しないことを示せ。

4 [2017 九州大]

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) 2 以上の自然数 n に対して，$a_{n+2}>2a_n$ が成り立つことを示せ。

(2) 2 以上の自然数 m は，数列 $\{a_n\}$ の互いに異なる k 個 ($k\geqq 2$) の項の和で表されることを，数学的帰納法によって示せ。

(3) (2) における項の個数 k は，$k<2\log_2 m+2$ を満たすことを示せ。

5 [2008 筑波大]

p，q を正の実数とする。x の方程式 $\log_{10}(px)\cdot\log_{10}(qx)+1=0$ が 1 より大きい解をもつとき，点 $(\log_{10}p,\ \log_{10}q)$ の存在する範囲を座標平面上に図示せよ。

6 [2014 京都大]

次の式

$$a_1=2,\ a_{n+1}=2a_n-1 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 不等式 $a_n{}^2-2a_n>10^{15}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ であることは用いてよい。

7 [2011 早稲田大]

$\log_3 n$ が無理数となる 2011 以下の正の整数 n は，全部で $\boxed{}$ 個ある。

8 [2011 大阪大]

実数の組 $(x,\ y,\ z)$ で，どのような整数 l，m，n に対しても，等式

$$l\cdot 10^{x-y}-nx+l\cdot 10^{y-z}+m\cdot 10^{x-z}=13l+36m+ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。