

$\boxed{1}$［2017 大阪大］

実数 x，y，z が $x+y+z=1$，$x+2y+3z=5$ を満たすとする。

(1) $x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ。

(2) $z\geqq 0$ のとき，xyz が最大となる z の値を求めよ。

$\boxed{2}$［2017 筑波大］

a，b，c を実数とし，β，m をそれぞれ $0<\beta<1$，$m>0$ を満たす実数とする。また，関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta$，$-\beta$ で極値をとり，$f(-1)=f(\beta)=-m$，$f(1)=f(-\beta)=m$ を満たすとする。

(1) a，b，c および β，m の値を求めよ。

(2) 関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ に対して $f(-1)\leqq g(x)\leqq f(1)$ を満たすとする。$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，$h(-1)$，$h(-\beta)$，$h(\beta)$，$h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより，$h(x)$ を求めよ。

$\boxed{3}$［2015 慶応義塾大］

a，b，c を実数とする。x の関数 $F(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\alpha$ で極大になり，$x=\beta$ で極小になるとする。曲線 $y=F(x)$ 上の点 $\mathrm{B}(\beta,\ F(\beta))$ における接線を ℓ とし，ℓ と $y=F(x)$ の共有点のうち B と異なるものを $(\gamma,\ F(\gamma))$ とする。

(1) x の整式 $F(x)-F(\beta)$ を，β，γ を用いて 1 次式の積に因数分解された形で表せ。

(2) γ を α，β のみを含む式で表せ。必要ならば x の整式で表される関数 $p(x)$，$q(x)$ とそれらの導関数に関して成り立つ公式

$$\{p(x)q(x)\}'=p'(x)q(x)+p(x)q'(x)$$

を用いてもよい。

(3) $f(x)=F'(x)$ とする。直線 $x=\gamma$，x 軸，および曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形のうち $y\geqq 0$ となる部分の面積 S を，α，β のみを含む式で表せ。更に，$a-b\geqq \dfrac{3}{2}$ が成り立つとき，S の最小値を求めよ。

$\boxed{4}$［2010 東北大］

a，b を正の実数とする。曲線 $C:\ y=x^3-a^2x+a^3$ と点 $\mathrm{P}(b,\ 0)$ を考える。

(1) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 3 本引けるような点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示せよ。

(2) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 2 本引けるとする。2 つの接点を A，B としたとき，$\angle\mathrm{APB}$ が 90° より小さくなるための a と b の条件を求めよ。

$\boxed{5}$［2008 一橋大］

a を正の定数とし，2 つの放物線 $y=ax^2$，$y=-2x^2$ をそれぞれ C_1，C_2 とする。負の実数 t に対して，点 $\mathrm{P}(0,\ t)$ を通る傾きが正の直線 ℓ が，C_1 と点 Q で接している。ℓ と C_2 の 2 つの共有点のうち，x 座標が正のものを R とする。

(1) Q および R の座標を求めよ。

(2) 線分 OR が $\angle\mathrm{POQ}$ を 2 等分するときの t の値を求めよ。ただし，O は原点を表す。

$\boxed{6}$［2012 九州大］

関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考える。曲線 $C:\ y=f(x)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $t\geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を 2 本もつことを示せ。

(2) (1) において，傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする（ただし $p<q$）。このとき，点 P と点 Q は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ。

(3) $t\geqq 0$ のとき，2 点 P，Q の間の距離の最小値を求めよ。また，最小値を与えるときの P，Q の x 座標 p，q もそれぞれ求めよ。

$\boxed{7}$［2008 一橋大］

a を 0 でない実数とする。関数 $f(x)=2x^3-9ax^2+12a^2x$ は $x=p$ で極大値をとるとする。

(1) a が動くとき，点 $(p,\ f(p))$ の全体からなる領域を xy 平面上に図示せよ。

(2) a が動き、r が $r\geqq p$ という条件の下で動くとき，点 $(r,\ f(r))$ の全体からなる領域を xy 平面上に図示せよ。