1 [2012 東北大]

平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$ を満たすとする。ただし，記号 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ はベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を表す。

(1) 実数 p，q に対して，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ とおく。このとき，次の条件

$$|\vec{c}|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=0,\ p>0$$

を満たす実数 p，q を求めよ。

(2) 平面上のベクトル $\vec{x}$ が $-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq1$，$1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq2$ を満たすとき，$|\vec{x}|$ のとりうる値の範囲を求めよ。

2 [2014 大阪大]

実数 a，b，c，d，e に対して，座標平面上の点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(c,\ d)$，$\mathrm{C}(e,\ 0)$ をとる。ただし点 A と点 B はどちらも原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とは異なる点とする。このとき，実数 s，t で $s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たすものが存在するための，a，b，c，d，e についての必要十分条件を求めよ。

3 [2012 東京理科大]

$\triangle\mathrm{OAB}$ において，辺 AB を $2:1$ の比に内分する点を C ($\mathrm{AC}:\mathrm{CB}=2:1$)，線分 OC を $1:2$ の比に内分する点を D ($\mathrm{OD}:\mathrm{DC}=1:2$) とする。辺 OA 上に点 P を，辺 OB 上に点 Q を，線分 PQ が点 D を通るようにとる。

(1) $\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OP}}+2\times\dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{OQ}}$ の値を求めよ。

以下，$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=3$，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ とする。

(2) $\mathrm{OP}=1$ のとき，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を求めよ。

(3) 線分 OP の長さと線分 OQ の長さの和 $\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}$ が最も小さくなるように点 P，Q をとるとき，OP を求めよ。また，このとき，$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}$ を求めよ。

4 [2015 早稲田大]

平面上に長さ 1 のベクトル $\vec{n}$ がある。また，a は $a>1$ を満たす定数とする。平面上のベクトル $\vec{x}$ に対して，ベクトル $\vec{y}$ を $\vec{y}=\vec{x}-a(\vec{x}\cdot\vec{n})\vec{n}$ により定める。ただし，$\vec{x}\cdot\vec{n}$ はベクトルの内積を意味し，$a(\vec{x}\cdot\vec{n})$ はその a 倍の実数を表している。

(1) すべてのベクトル $\vec{x}$ に対して $|\vec{x}|=|\vec{y}|$ が成り立つための必要十分条件は，$a=2$ であることを示せ。

(2) $\vec{x}\neq\vec{0}$ とする。$\vec{x}$ と $\vec{n}$ のなす角を θ とし，$\vec{y}$ と $\vec{n}$ のなす角を ϕ とする。このとき，a と $\cos\theta$ を用いて $\cos\phi$ を表せ。

5 [2017 千葉大]

n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $\mathrm{A_1A_2}\cdots\cdots\mathrm{A}_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OA_4}}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 $\mathrm{A_1A_3}$ と線分 $\mathrm{A_2A_4}$ との交点 P は線分 $\mathrm{A_1A_3}$ を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle\mathrm{PA_2A_3}}{\triangle\mathrm{A_1A_2A_4}}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。

6 [2015 東北大]

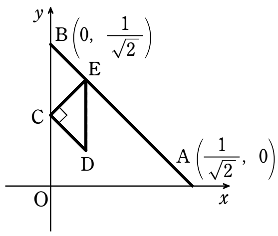
$t>0$ を実数とする。座標平面において，3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3) 辺 AB，BP，PA の中点をそれぞれ M，Q，R とおく。t が (1) で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ，QR，RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

7 [2012 早稲田大]



平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ をとり，図のように，$\triangle\mathrm{OAB}$ の各辺上または内部に，$\mathrm{DE}/\!/\mathrm{OB}$ かつ $\angle\mathrm{DCE}$ を直角とする二等辺三角形 CDE をとる。点 C，E はそれぞれ OB，AB 上の点とする。線分 CE の長さを m (>0) とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) m の最大値を求めよ。

(2) s，t を正の数とし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CD}}+t\overrightarrow{\mathrm{CE}}$ を $^{ア}\boxed{}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+{}^{イ}\boxed{}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表すとき，空欄 $^{ア}\boxed{}$，$^{イ}\boxed{}$ をそれぞれ s，t および m の式で表せ。

(3) 等式 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CD}}+t\overrightarrow{\mathrm{CE}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす s，t をそれぞれ m の式で表せ。

(4) 前問 (3) で求めた s，t を用いて，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ によって定める。このとき，$\dfrac{y}{x}$ を $\dfrac{1}{m}$ の式で表せ。

(5) 前問 (4) における点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡は x，y の方程式

$$\left(x+{}^{ウ}\boxed{}\right)^2+\left(y-{}^{エ}\boxed{}\right)^2={}^{オ}\boxed{}$$

で表される。