

1 [2014 鹿児島大]

α，β，γ はいずれも 0 でない複素数とする。ただし，複素数 z に対して，$\overline{z}$ は z の共役複素数，$|z|$ は z の絶対値を表す。

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ が正の実数ならば，$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ が成り立つことを示せ。

(2) $\gamma+\overline{\gamma}=2|\gamma|$ が成り立つならば，γ は正の実数であることを示せ。

(3) $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ が成り立つならば，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ は正の実数であることを示せ。

2 [2014 大分大]

1 の 3 乗根のうち，実数でないものの 1 つを α とするとき，複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\alpha^2)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心が $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ で表される。

(1) 点 B を表す複素数 β を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の周上の点を表す複素数を z とするとき，z の満たす式を求めよ。

(3) z が (2) で求めた式を満たすとき，$w=\dfrac{1}{z}$ を満たす点 w の描く図形を求めよ。

3 [2017 東京都市大]

複素数 α，β は $\alpha+\beta+2=0$，$|\alpha|=|\beta|=2$ を満たしている。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(2)$ を頂点とする△ABC の面積を求めよ。

4 [2017 立命館大]

$i=\sqrt{-1}$ を虚数単位とし，複素数 $\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{4}$ とする。表が出る確率と裏が出る確率がともに $\dfrac{1}{2}$ のコインを投げて，その表裏によって，複素数 z_1，z_2，…… を順に定めていく。

- 1 回目にコインを投げて，表であれば $z_1=\alpha$，裏であれば $z_1=\alpha^2$ と定める。
- 2 回目にコインを投げて，表であれば $z_2=\alpha z_1$，裏であれば $z_2=\alpha^2 z_1$ と定める。
- n 回目にコインを投げて定まる複素数を z_n とするとき，$(n+1)$ 回目にコインを投げて，表であれば $z_{n+1}=\alpha z_n$，裏であれば $z_{n+1}=\alpha^2 z_n$ と定める。ただし，n は自然数とする。

このとき，複素数 z_n が実数となる確率 P_n について考える。P_1，P_2，P_3 の値は

$P_1=$ ア $\boxed{\quad}$，$P_2=$ イ $\boxed{\quad}$，$P_3=$ ウ $\boxed{\quad}$ となる。z_n が実数であった場合に z_{n+1} が実数となる確率は エ $\boxed{\quad}$ であり，z_n が実数でなかった場合に z_{n+1} が実数となる確率は オ $\boxed{\quad}$ である。ゆえに，P_{n+1} は P_n を用いて表すと $P_{n+1}=$ カ $\boxed{\quad}$ となる。したがって，P_n は n を用いて $P_n=$ キ $\boxed{\quad}$ と表される。

5 [2017 名古屋工業大]

複素数平面上の原点 O と異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ に対して

$$3\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2=0$$

が成り立つ。3 点 O，A，B を通る円を C とする。

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表せ。ただし，偏角 θ の範囲は $-\pi<\theta\leqq\pi$ とする。

(2) 円 C の中心と半径を α を用いて表せ。

(3) $|3\alpha-2\beta|$ を β を用いて表せ。

(4) 次が成り立つとき α を求めよ。

(i) 点 z が円 C 上を動くとき $w=i\overline{z}$ も C 上にある。

(ii) $\alpha+\overline{\alpha}$ は正の実数である。

(iii) $|3\alpha-2\beta|=2\sqrt{6}$

6 [2017 千葉大]

複素数平面上の点 z $\left(z\neq-\dfrac{i}{2}\right)$ に対して，$w=\dfrac{z+2i}{2z+i}$ とする。

(1) 点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(2) 点 z が点 α を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描く。このような r と α の組をすべて求めよ。

7 [2017 東京理科大]

3 次方程式 $4z^3+4z^2+5z+26=0$ は 1 つの実数解と 2 つの虚数解をもつ。実数解を z_1，2 つの虚数解のうち虚部が正のものを z_2，負のものを z_3 とする。ただし，虚数単位を i で表す。

(1) 方程式の解は $z_1=$ ア $\boxed{\quad}$，$z_2=$ イ $\boxed{\quad}$，$z_3=$ ウ $\boxed{\quad}$ である。

次に，複素数平面上に，z_1 を表す点 A，z_2 を表す点 B，z_3 を表す点 C をとる。また，2 点 B，C を通る直線上に点 P をとる。点 A を中心に点 P を反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させた点を Q とする。以下 (2)，(3)，(4) では点 Q を表す複素数を $x+yi$ とする。ただし，x と y は実数とする。

(2) x を y の式で表すと $x=$ エ $\boxed{\quad}$ である。

2 点 P，Q を通る直線に関して点 A と対称な点を R とする。以下 (3)，(4) では点 R を表す複素数の実部が 1 である場合を考える。

(3) $x=$ オ $\boxed{\quad}$，$y=$ カ $\boxed{\quad}$ である。

(4) 点 Q を中心とする半径 $\dfrac{3}{2}$ の円周上の点を S とする。点 S を表す複素数を w とするとき，w^{29} が実数となるような w の個数は キ $\boxed{\quad}$ 個である。

8 [2017 神戸大]

$\mathrm{A}(\alpha)$ を原点と異なる複素数平面上の点とし，正の実数 r は $r\neq|\alpha|$ を満たすとする。等式 $\left|\dfrac{1}{z}-\overline{\alpha}\right|=r$ を満たす複素数平面上の点 $\mathrm{P}(z)$ の描く図形を C で表す。ただし，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す。

(1) C が円であることを示し，その中心と半径を求めよ。

(2) 原点 O を中心とする半径 1 の円を S で表す。C の中心が A，半径が r になるとき，C と S の共有点が存在することを示せ。さらに，このとき C と S の任意の共有点 Q に対して，$\mathrm{OQ}\perp\mathrm{AQ}$ が成り立つことを示せ。

9 [2017 筑波大]

$0<a<\dfrac{\pi}{2}$ とする。複素数平面上において，原点を中心とする半径 1 の円の上に異なる 5 点 $\mathrm{P}_1(w_1)$，$\mathrm{P}_2(w_2)$，$\mathrm{P}_3(w_3)$，$\mathrm{P}_4(w_4)$，$\mathrm{P}_5(w_5)$ が反時計まわりに並んでおり，次の 2 つの条件 (A)，(B) を満たすとする。

(A) $(\cos^2 a)(w_2-w_1)^2+(\sin^2 a)(w_5-w_1)^2=0$ が成り立つ。

(B) $\dfrac{w_3}{w_2}$ と $-\dfrac{w_4}{w_2}$ は方程式 $z^2-\sqrt{3}\,z+1=0$ の解である。

また，五角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5$ の面積を S とする。

(1) 五角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5$ の頂点 P_1 における内角 $\angle\mathrm{P}_5\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ を求めよ。

(2) S を a を用いて表せ。

(3) $R=|w_1+w_2+w_3+w_4+w_5|$ とする。このとき，R^2+2S は a の値によらないことを示せ。

10 [2017 同志社大]

t を正の実数とする。t に対して，複素数 $\alpha=2+ti$ とし，α の共役な複素数を $\overline{\alpha}$ とする。方程式 $z^3=-8$ の解で虚部が正のものを ω とする。複素数平面上の 3 点を $\mathrm{A}(\omega)$，$\mathrm{B}(\alpha\omega)$，$\mathrm{C}(\overline{\alpha}\omega)$ とする。

(1) ω を極形式で表せ。ただし，ω の偏角 $\arg\omega$ は $0\leqq\arg\omega<2\pi$ とする。

(2) 線分 AB，AC の長さを t で表せ。

(3) 3 点 A，B，C を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径を r とする。t が正の実数全体を動くとき，$\dfrac{r}{t}$ の最小値とそのときの t の値を求めよ。

11 [2017 奈良県立医科大]

n を 3 以上の整数とする。半径 $r\,(>0)$ の円 C に内接する正 n 角形の n 個の頂点を反時計回りの順に P_0，P_1，……，P_{n-1} とおく。点 Q が円 C の周上を動くとき，n 個の線分 QP_0，QP_1，……，QP_{n-1} の長さの積 $L(\mathrm{Q})$ が最大となるような点 Q の位置，および $L(\mathrm{Q})$ の最大値を求めよ。

12 [2017 茨城大]

α を複素数の定数とし，自然数 n に対して複素数 z_n を $z_1=0$，$z_{n+1}=\alpha z_n+1-\alpha$ で定める。

(1) z_2，z_3，z_4 をそれぞれ α を用いて表せ。

(2) 一般の n について z_n を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

以下では，$\alpha=\dfrac{1}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$ とする。ただし，i は虚数単位を表し，$0\leqq\theta<2\pi$ とする。

(3) $\dfrac{\theta}{\pi}$ が無理数であるとき，どんな自然数 n に対しても z_{n+1} は実数にならないことを示せ。

(4) 自然数 n に対して，複素数平面上の 2 点 z_n と z_{n+1} との距離を l_n とする。無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ の和 L を求めよ。さらに，θ が $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲を動くとき，L の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

13 [2015 静岡大]

i を虚数単位，r を 1 より大きい実数とし，$w=r\left(\cos\dfrac{\pi}{24}+i\sin\dfrac{\pi}{24}\right)$ とおく。また，数列 $\{z_n\}$ を次の式で定める。

$$z_1=w,\quad z_{n+1}=z_n w^{n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1) z_2 を r を用いて表せ。

(2) z_n の偏角の 1 つを n を用いて表せ。

(3) 複素数平面で原点を O，z_n で表される点を P_n とする。$7\leqq n\leqq 48$ のとき，$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1}$ が $\angle\mathrm{O}=\dfrac{\pi}{3}$ を満たす直角三角形となるような n と r をそれぞれ求めよ。また，そのときの z_n の偏角 θ を $0\leqq\theta<2\pi$ の範囲で求めよ。

14 [2014 三重大]

絶対値が 1 で偏角が θ の複素数 を z とし，n を正の整数とする。

(1) z^n を θ で表す式を三角関数の加法定理を用いて，数学的帰納法で証明せよ。

(2) $|1-z^2|$ を θ の関数で表せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin 2k\theta$ を計算せよ。

15 [2014 愛媛大]

複素数 z と複素数 w の間に $w=\dfrac{z+\alpha}{z+i\alpha}$ なる関係がある。

ただし，α は $|\alpha|=1$ となる複素数の定数，i は虚数単位である。

(1) $w=2-i$ のとき，z は正の実数であるとする。α を求めよ。

(2) $\alpha=i$ とする。w が $\dfrac{2}{9}\leqq\left|w-\dfrac{1}{3}(4+i)\right|^2\leqq\dfrac{8}{9}$ を満たすとき，z の表す点が動く範囲を複素数平面上に図示せよ。

16 [2014 学習院大]

0 でない実数 a，b，c に対し，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を α，β とおく。$\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ を 2 つの解とする 2 次方程式を $t^2+pt+q=0$ とする。

(1) p，q を a，b，c を用いて表せ。

(2) α，β が虚数になる条件は，方程式 $t^2+pt+q=0$ が虚数解をもつことであることを示せ。

(3) 複素数平面上で，3 点 0，$\dfrac{\alpha}{\beta}$，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ が正三角形を作る条件は，$b^2=(2\pm\sqrt{3})ac$ であることを示せ。