

$\boxed{1}$［2015 東京理科大］

座標平面上に3点 A$(-1,\ 0)$，B$(1,\ 0)$，C$(0,\ 1)$ がある。

(1) 楕円 $E：\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$ は2点 A，B を焦点としてもつとする。このとき，

$b=\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ である。

(2) 2点 A，C を通る直線と，(1) で定めた楕円 E の交点を P$(x_0,\ y_0)$ $(x_0>0)$ とする

と，$x_0=-\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}+\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$，$y_0=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}+\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$

である。

(3) (2) で定めた点 P に対して，PB＋PC$=\boxed{\text{シ}}-\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ である。

QB＋QC$=\boxed{\text{シ}}-\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$ となるような点 Q$(x,\ y)$ の軌跡の方程式は

$$\frac{(x-y)^2}{\alpha}+\frac{(x+y-\gamma)^2}{\beta}=1$$

である。このとき，

$$\alpha=\boxed{\text{セ}}-\boxed{\text{ソ}}\sqrt{\boxed{\text{タ}}},\quad \beta=\boxed{\text{チ}}-\boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}},$$

$$\gamma=\boxed{\text{ト}}$$

となる。

$\boxed{2}$［2017 同志社大］

楕円 $x^2+2y^2=1$ を D とする。r が正の実数のとき，点 $(1-r,\ 0)$ を中心とする半径 r の円を C とする。

(1) D と C が3つの異なる共有点をもつような r の値の範囲を求めよ。

(2) r が (1) で求めた範囲にあるとき，(1) の3つの共有点が作る三角形の面積 $S(r)$ を求めよ。

(3) r が (1) で求めた範囲を動くとき，(2) で求めた $S(r)$ の最大値とそのときの r の値を求めよ。

$\boxed{3}$［2017 金沢大］

座標平面上の放物線 $y=x^2$ 上に点 P$(t,\ t^2)$ $(t>0)$ をとる。原点 O$(0,\ 0)$ を通り，直線 OP に垂直な直線を ℓ とする。また，$0<a\leqq 1$ として，点 A$(0,\ a)$ をとる。

(1) 直線 PA と ℓ は交わることを示し，その交点 Q$(u,\ v)$ の座標を t と a を用いて表せ。

(2) t がすべての正の実数値をとって変化するとき，(1) で求めた点 Q$(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通るとする。このとき，定数 a の値を求め，点 Q$(u,\ v)$ の軌跡を求めよ。

$\boxed{4}$［2017 旭川医科大］

O を原点とする座標平面上に長さ1の線分 AB がある。線分 AB の端点 A は x 軸上の $x\geqq 0$ の部分を，端点 B は y 軸上の $y\geqq 0$ の部分を動くものとする。

(1) 線分 AB が x 軸となす角 ∠OAB が θ であるとき，直線 AB を L_θ で表す。直線 L_θ の方程式を求めよ。ただし，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である。

(2) t は $0<t\leqq 1$ を満たす定数とする。直線 $x=t$ と 直線 L_θ との交点を P_θ とする。点 P_θ の y 座標が最大となる θ を α とするとき，$\cos\alpha$ を t を用いて表せ。

(3) 点 P_α の直交座標 $(x,\ y)$ を α を用いて表せ。また $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，点 P_α の極座標を求めよ。

(4) α が $0\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，点 P_α の描く曲線を C とする。C 上の点 P_α における接線が L_α であることを示し，C の概形を図示せよ。

$\boxed{5}$［2015 千葉大］

双曲線 $x^2-y^2=1$ …… ① の漸近線 $y=x$ …… ② 上の点 $\mathrm{P}_0:(a_0,\ a_0)$ (ただし $a_0>0$) を通る双曲線 ① の接線を考え，接点を Q_1 とする。Q_1 を通り漸近線 ② と垂直に交わる直線と，漸近線 ② との交点を $\mathrm{P}_1:(a_1,\ a_1)$ とする。次に P_1 を通る双曲線 ① の接線の接点を Q_2，Q_2 を通り漸近線 ② と垂直に交わる直線と，漸近線 ② との交点を $\mathrm{P}_2:(a_2,\ a_2)$ とする。この手続きを繰り返して同様にして点 $\mathrm{P}_n:(a_n,\ a_n)$，Q_n を定義していく。

(1) Q_n の座標を a_n を用いて表せ。

(2) a_n を a_0 を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ の面積を求めよ。

$\boxed{6}$［2015 首都大学東京］

座標平面において楕円 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ を C とする。

(1) C に接する傾き m の直線の方程式をすべて求めよ。

(2) すべての辺が C に接する長方形の1辺の傾きが m であるとする。この長方形の面積 $S(m)$ を求めよ。

(3) m がすべての実数を動くとき，(2) で求めた $S(m)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{7}$［2015 神戸大］

O を原点とする座標平面において，3つの曲線 C_1，C_2，C_3 を

$$C_1：x^2+y^2=1\quad (x\geqq 0,\ y\geqq 0)$$

$$C_2：\frac{x^2}{3}+3y^2=1\quad (x\geqq 0,\ y\geqq 0)$$

$$C_3：x^2+y^2=3\quad (x\geqq 0,\ y\geqq 0)$$

で定める。C_1 と C_2 の交点を P とする。P を通り x 軸に垂直な直線と C_3 との交点を Q とし，直線 OQ と C_1 の交点を R とする。直線 OP と C_3 の交点を S とし，S を通り x 軸に垂直な直線と C_2 との交点を T とする。

(1) 直線 RT は C_1 に接することを示せ。

(2) 直線 RT は C_2 に接することを示せ。

(3) 直線 RT と C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{8}$［2015 北海道大］

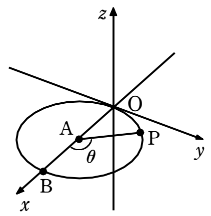
方程式 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ で定まる楕円 E とその焦点 F$(1,\ 0)$ がある。E 上に点 P をとり，直線 PF と E との交点のうち P と異なる点を Q とする。F を通り直線 PF と垂直な直線と E との2つの交点を R，S とする。

(1) r を正の実数，θ を実数とする。点 $(r\cos\theta+1,\ r\sin\theta)$ が E 上にあるとき，r を θ で表せ。

(2) P が E 上を動くとき，PF＋QF＋RF＋SF の最小値を求めよ。

$\boxed{9}$［2015 佐賀大］

点 O を原点とし，x 軸，y 軸，z 軸を座標軸とする座標空間において，3点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(2,\ 0,\ 0)$，C$(1,\ 0,\ 1)$ がある。点 A を中心とする xy 平面上の半径1の円周上に点 P をとり，図のように $\theta=\angle\mathrm{BAP}$ とおく。ただし，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ とする。また，直線 CP と yz 平面の交点を Q とおく。



(1) 点 P の座標を θ を用いて表せ。

(2) 点 Q の座標を θ を用いて表せ。

(3) θ の値が $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ の範囲で変化するとき，yz 平面における点 Q の軌跡の方程式を求め，その概形を図示せよ。

$\boxed{10}$［2015 中央大］

a を正の定数とし，座標平面上の2点 A$(2a,\ 0)$，B$(-2a,\ 0)$ を焦点とする双曲線

$$C：\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1$$

を考える。この双曲線の第1象限の部分を C_1 とし，動点 P$(s,\ t)$ は C_1 上を動くものとする。

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{s\to\infty}(\sqrt{3}\,s-t)$ および $\displaystyle\lim_{s\to\infty}s(\sqrt{3}\,s-t)$ を求めよ。

双曲線 C の2本の漸近線のうち，傾きが正のものを ℓ とし，線分 PB と ℓ の交点を Q とする。

(2) 点 Q の y 座標を s，t で表せ。

(3) 線分 PQ と PB の長さの比 $\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PB}}$ を s，t で表せ。

(4) 極限 $\displaystyle\lim_{s\to\infty}s\cdot\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{PB}}$ を求めよ。

$\boxed{11}$［2015 関西大］

n を正の整数とする。第1象限において，点 P$(x,\ y)$ が曲線 $x^2+n^2y^2=2$ 上を動くとき，xy の最大値 a_n を n を用いて表すと，$a_n=$ $^{ア}\boxed{}$ である。また，xy が最大となるPの座標を $(x_n,\ y_n)$ とすると，$(x_n,\ y_n)=\left({}^{イ}\boxed{},\ {}^{ウ}\boxed{}\right)$ である。さらに，曲線 $x^2+n^2y^2=2$ の点 $(x_n,\ y_n)$ における接線の方程式は $y=$ $^{エ}\boxed{}$，法線の方程式は $y=$ $^{オ}\boxed{}$ である。この接線と x 軸，および y 軸で囲まれた三角形の面積 S_n を n を用いて表すと，$S_n=$ $^{カ}\boxed{}$ である。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n}ka_{n+k}\right)S_n\right\}=$ $^{キ}\boxed{}$ である。

$\boxed{12}$［2014 埼玉大］

実数 $a,\ b$ は $a>b>0$ および $a^2-b^2=2ab$ を満たすとする。xy 平面上で $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$ によって媒介変数表示された楕円を C とする。点 P $(b\cos t,\ a\sin t)$ $\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ と C 上の動点 Q$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ に対し，$f(\theta)=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ とおく。

(1)　$f'(\theta)=0$ であるとき，$\sin2\theta=\sin(\theta-t)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$f'(\theta)=0$ となる θ を t を用いて表せ。

(3)　$f'(\theta)=0$ となる θ がちょうど3つとなる t の値を求めよ。

(4)　t を(3)で求めた値とする。このとき，$f'(\theta)=0$ となる各 θ に対応する C 上の3点を頂点とする三角形の面積を $a,\ b$ を用いて表せ。

$\boxed{13}$［2015 宮崎大］

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ を満たす θ について，$r(\theta)=\sqrt{2\cos2\theta}$ とするとき，座標平面上で円 $x^2+y^2=\{r(\theta)\}^2$ と直線 $y=(\tan\theta)x$ は2つの交点をもつ。そのうち，x 座標が正であるものをPとし，Pの x 座標を $f(\theta)$，y 座標を $g(\theta)$ とする。θ を $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ の範囲で動かしたときの点Pの軌跡を C とする。

(1)　$f(\theta)$，$g(\theta)$ を求めよ。

(2)　$g(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3)　曲線 C と x 軸，直線 $x=f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{14}$［2014 筑波大］

xy 平面上に楕円 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1$ $(a>\sqrt{13})$ および双曲線 $C_2:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ があり，C_1 と C_2 は同一の焦点をもつとする。また C_1 と C_2 の交点 $\mathrm{P}\left(2\sqrt{1+\dfrac{t^2}{b^2}},\ t\right)$ $(t>0)$ における C_1，C_2 の接線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とする。

(1)　a と b の間に成り立つ関係式を求め，点Pの座標を a を用いて表せ。

(2)　ℓ_1 と ℓ_2 が直交することを示せ。

(3)　a が $a>\sqrt{13}$ を満たしながら動くときの点Pの軌跡を図示せよ。

$\boxed{15}$［1997 帯広畜産大］

(1)　直交座標において，点 A$(\sqrt{3},0)$ と準線 $x=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$ からの距離の比が $\sqrt{3}:2$ である点 P(x,y) の軌跡を求めよ．

(2)　(1)における A を極，x 軸の正の部分の半直線 AX とのなす角 θ を偏角とする極座標を定める．このとき，Pの軌跡を $r=f(\theta)$ の形の極方程式で求めよ．ただし，$0\leqq\theta<2\pi,r>0$ とする．

(3)　A を通る任意の直線と(1)で求めた曲線との交点を R, Q とする．このとき $\dfrac{1}{\mathrm{RA}}+\dfrac{1}{\mathrm{QA}}$ は一定であることを示せ．

$\boxed{16}$［2011 九州大］

座標平面上の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　x 座標が小さい方の焦点Fを極とし，Fから x 軸の正の方向へ向かう半直線を始線とする極座標 $(r,\ \theta)$ で表された楕円の極方程式 $r=f(\theta)$ を求めよ。

(2)　座標平面上の原点 O$(0,\ 0)$ と楕円上の2点 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ について，線分 $\mathrm{OP_1}$ と線分 $\mathrm{OP_2}$ とが互いに直交する位置にあるとする。線分 $\mathrm{OP_1}$ および $\mathrm{OP_2}$ の長さをそれぞれ r_1，r_2 とするとき，$\dfrac{1}{{r_1}^2}+\dfrac{1}{{r_2}^2}$ の値は定数となることを示せ。

$\boxed{17}$［2009 近畿大］

座標平面において，原点Oを極，x 軸の正の部分を始線とする極座標 $(r,\ \theta)$ を考え，極方程式 $r=1+\cos\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ が表す曲線を C とする。

(1)　C 上の点 $(x,\ y)$ に対して，x が最大値 $^{ア}\boxed{}$ をとるのは，$\theta=$ $^{イ}\boxed{}$，$y=$ $^{ウ}\boxed{}$ のときである。y が最大値 $^{エ}\boxed{}$ をとるのは $\theta=$ $^{オ}\boxed{}\pi$，$x=$ $^{カ}\boxed{}$ のときである。第2象限において，x が最小値 $^{キ}\boxed{}$ をとるのは $\theta=$ $^{ク}\boxed{}\pi$，$y=$ $^{ケ}\boxed{}$ のときである。

(2)　曲線 C を直交座標で表すと $x^{コ\boxed{}}+y^{サ\boxed{}}-x=\sqrt{x^{シ\boxed{}}+y^{ス\boxed{}}}$ である。

$\boxed{18}$［2008 山形大］

$f(\theta)=(1+\cos\theta)(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)+4$ とおく。極方程式 $r=f(\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$ で表される曲線を C とする。

(1)　原点を中心として x 軸を θ だけ回転した直線が C によって切り取られてできる線分を L とする。L の長さ l を θ を用いて表せ。

(2)　長さ l $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

(3)　L の中点Mが描く曲線の極方程式を $r=g(\theta)$ $(0\leqq\theta\leqq2\pi)$ とする。$g(\theta)$ を求めよ。

(4)　Mが描く曲線の方程式を直交座標 $(x,\ y)$ を用いて表せ。

(5)　θ が $\dfrac{7}{6}\pi\leqq\theta\leqq2\pi$ の範囲を動くとき，Mが描く曲線を図示せよ。