

$\boxed{1}$［2007 旭川医科大］

不等式 $\sqrt{a^2-x^2}>ax-a$ を解け。ただし，a は定数で，$a\fallingdotseq 0$ とする。

$\boxed{2}$［2014 岡山理科大］

関数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}+1}{x^{2n}+x-1}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(1)$，$f(-1)$ を求めよ。

(2)　$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ。

(3)　$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(4)　$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=ax$ がただ 1 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$［2017 富山大］

実数全体で定義された関数 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f'(x)$，$f''(x)$ を求めよ。

(2)　$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3)　$a>0$ とするとき，極限 $\lim\limits_{x\to\infty}\{f^{-1}(af(x))-x\}$ を求めよ。

(4)　$a>0$ とするとき，極限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\{f^{-1}(af(x))-x\}$ を求めよ。

$\boxed{4}$［2015 金沢大］

関数 $y=\log_3 x$ とその逆関数 $y=3^x$ のグラフが，直線 $y=-x+s$ と交わる点をそれぞれ $\mathrm{P}(t,\ \log_3 t)$，$\mathrm{Q}(u,\ 3^u)$ とする。

(1)　線分 PQ の中点の座標は $\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{s}{2}\right)$ であることを示せ。

(2)　s，t，u は $s=t+u$，$u=\log_3 t$ を満たすことを示せ。

(3)　$\lim\limits_{t\to3}\dfrac{su-k}{t-3}$ が有限な値となるように，定数 k の値を定め，その極限値を求めよ。

$\boxed{5}$［2013 神戸大］

関数 $f(x)=2x^2+2x+1$ $\left(x\geqq-\dfrac{1}{2}\right)$ の逆関数を $g(x)$ とする。

(1)　関数 $g(x)$ の定義域を求めよ。

(2)　$g(x)$ を求めよ。

(3)　曲線 $y=g(x)$ 上の点と直線 $y=2x-1$ の距離の最小値を求めよ。また，その最小値を与える $y=g(x)$ 上の点を求めよ。

$\boxed{6}$［1997 東京理科大］

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\cos^2x+(3b+2)\sin x-2a+b+1}{\sin^3x+a\cos^2x-a}=c$ となるように実数の定数 a, b, c の値を定めよ．

$\boxed{7}$［2015 同志社大］

α は $0<\alpha<\pi$ を満たす実数，n，k は正の整数として，次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\dfrac{\alpha}{2n}\sin\dfrac{k\alpha}{n}$ を $\cos\dfrac{(2k-1)\alpha}{2n}$ と $\cos\dfrac{(2k+1)\alpha}{2n}$ を用いて表せ。

(2)　$\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k\alpha}{n}$ と極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{\alpha}{2n}$ を求めよ。

(3)　極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{k\alpha}{n}$ を求めよ。

$\boxed{8}$［2015 中央大］

i を虚数単位とする。実数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$\left(\frac{1+i}{2}\right)^n=a_n+ib_n\quad(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

により定める。a_{n+1} を a_n と b_n で表すと $a_{n+1}=\boxed{\text{ア}}$ であり，b_{n+1} を a_n と b_n で表すと $b_{n+1}=\boxed{\text{イ}}$ である。また，${a_n}^2$ と ${b_n}^2$ で ${a_{n+1}}^2+{b_{n+1}}^2$ を表すと ${a_{n+1}}^2+{b_{n+1}}^2=\boxed{\text{ウ}}$ であり，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\boxed{\text{エ}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\boxed{\text{オ}}$ である。

次に，無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ と $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ が収束するかどうかを調べる。$c=\dfrac{1+i}{2}$ とおくと，$a_n+ib_n=c^n$ である。自然数 N に対し，$\sum\limits_{n=1}^{N}a_n+i\sum\limits_{n=1}^{N}b_n$ を c と N で表すと $\sum\limits_{n=1}^{N}a_n+i\sum\limits_{n=1}^{N}b_n=\boxed{\text{カ}}$ である。$\boxed{\text{カ}}$ を a_N と b_N で表すと，$\boxed{\text{カ}}=\boxed{\text{キ}}+i\left(\boxed{\text{ク}}\right)$ であるから，$\sum\limits_{n=1}^{N}a_n=\boxed{\text{キ}}$，$\sum\limits_{n=1}^{N}b_n=\boxed{\text{ク}}$ となる。したがって，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\boxed{\text{ケ}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\boxed{\text{コ}}$ である。

$\boxed{9}$［2017 関西学院大］

c，p は定数とする。漸化式 $a_1=c$，$a_{n+1}=4a_n+p^n+9$ $(n\geqq1)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ に対して，$b_n=\dfrac{a_n}{4^{n-1}}$ $(n\geqq1)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$b_{n+1}-b_n$ を n，p の式で表せ。

(2)　$c=-2$，$p=4$ のとき，a_n を n の式で表せ。

(3)　$p=3$ のとき，a_n を n と c の式で表せ。

(4)　$p=3$ のとき，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{3^{n-1}}\right\}$ が収束するように c の値を定めよ。また，そのときの極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3^{n-1}}$ を求めよ。

$\boxed{10}$［2013 神戸大］

数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は $a_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{4-{a_n}^2}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を満たすとする。

(1)　すべての自然数 n に対し，$0\leqq a_n<1$ が成り立つことを示せ。

(2)　3 次方程式 $x^3-4x+1=0$ は，$0<x<1$ においてただ 1 つの解 α をもつことを示せ。

(3)　(2) の α に対し，$|a_{n+1}-\alpha|\leqq\beta|a_n-\alpha|$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ が成り立つような β $(0<\beta<1)$ を 1 つ求めよ。

(4)　(2) の α に対し $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{11}$［2017 大阪府立大］

数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1=3,\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{3}{a_n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　n は自然数とする。不等式 $a_n>\sqrt{6}$ を証明せよ。

(2)　n は自然数とする。不等式 $a_{n+1}-\sqrt{6}<\dfrac{1}{4}(a_n-\sqrt{6})^2$ を証明せよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の収束，発散について調べ，極限があればその極限を求めよ。

$\boxed{12}$［2017 名古屋工業大］

θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ を満たす定数とし，自然数 n に対して $a_n=\tan\dfrac{\theta}{2^n}$ とおく。

(1)　数列 $\{2^n a_n\}$ の極限を求めよ。

(2)　n が 2 以上のとき $\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{2}{a_{n-1}}=a_n$ が成り立つことを示せ。

(3)　$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k}{2^k}$ とおく。n が 2 以上のとき S_n を a_1 と a_n で表せ。

(4)　無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{2^n}$ の和を求めよ。

$\boxed{13}$［2015 徳島大］

c を実数とする。数列 $\{a_n\}$ は次を満たす。

$$a_1=1,\qquad a_{n+1}=\frac{{a_n}^2+cn-4}{3n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　a_2，a_3 を c を用いて表せ。

(2)　$a_1+a_3\leqq2a_2$ のとき，不等式 $a_n\geqq3$ $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots)$ を示せ。

(3)　$a_1+a_3=2a_2$ のとき，極限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

14［2015 金沢大］

$a>1$ とする。無限等比級数

$$a+ax(1-ax)+ax^2(1-ax)^2+ax^3(1-ax)^3+\cdots\cdots$$

が収束するとき，その和を $S(x)$ とする。

(1) この無限等比級数が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また，そのときの $S(x)$ を求めよ。

(2) x が (1) で求めた範囲を動くとき，$S(x)$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) $I(a)=\int_0^{\frac{1}{a}} S(x)dx$ とおくとき，極限値 $\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ。

15［2017 弘前大］

数列 $\{a_n\}$ は次を満たすとする。

$$a_1=6,\ a_{n+1}=1+a_1a_2\cdots\cdots a_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

ここで，$a_1a_2\cdots\cdots a_n$ は a_1 から a_n までの積を表す。

(1) 2 以上の自然数 n に対して，$a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ の和を求めよ。

16［2017 関西大］

xy 平面の x 軸上に点 $(a_0,\ 0)$ がある。ただし $0<a_0<1$ とする。原点 $(0,\ 0)$ と $(a_0,\ 0)$ を $2:1$ に内分する点と点 $(1,\ 0)$ との中点を $\mathrm{P}_1(a_1,\ 0)$ とする。次に原点と $\mathrm{P}_1(a_1,\ 0)$ を $2:1$ に内分する点と $(1,\ 0)$ との中点を $\mathrm{P}_2(a_2,\ 0)$ とする。さらに同様の操作を続けて点 $\mathrm{P}_{n-1}(a_{n-1},\ 0)$ を定める。

a_1 を a_0 で表すと ア$\boxed{\quad}$ である。同様に，原点と点 $\mathrm{P}_{n-1}(a_{n-1},\ 0)$ を $2:1$ に内分する点と点 $(1,\ 0)$ との中点を $\mathrm{P}_n(a_n,\ 0)$ とする。このとき a_n と a_{n-1} は，次の漸化式

$$a_n={}^{イ}\boxed{\quad}a_{n-1}+{}^{ウ}\boxed{\quad}$$

を満たす。ここで イ$\boxed{\quad}$，ウ$\boxed{\quad}$ は n に無関係な数である。この漸化式より a_n を a_1 と n で表すと，$a_n=$ エ$\boxed{\quad}$ である。

$a_0=$ オ$\boxed{\quad}$ のときは，P_n は n に無関係な定点である。$a_0\fallingdotseq$ オ$\boxed{\quad}$ のとき，n を大きくしていくと，P_n は点 $\mathrm{Q}\left({}^{カ}\boxed{\quad},\ 0\right)$ に限りなく近づく。また

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}=\frac{1}{3}$$

となるのは $a_0=$ キ$\boxed{\quad}$ のときである。

17［2015 金沢大］

実数 x に対し，$k\leqq x<k+1$ を満たす整数 k を $[x]$ と表す。

(1) 実数 x と自然数 n に対し，$\left[\frac{x}{n}\right]n\leqq x<n+\left[\frac{x}{n}\right]n$ が成り立つことを示せ。

(2) 実数 x と自然数 n に対し，$\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$ が成り立つことを示せ。

(3) 整数 p に対し，$a_1=p,\ a_{n+1}=\left[\frac{a_n}{n+1}\right]$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項と極限値 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

18［2017 長崎大］

xy 平面上に放物線 $C:y=x^2$ と直線 $\ell:y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ がある。$t>0$ とし，ℓ 上を動く点 $\mathrm{P}\left(t,\ \frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\right)$ から C に接線を引く。

(1) 点 P を通り，傾き m の直線が C に接するとき，m が満たす 2 次方程式を求めよ。さらに，この 2 次方程式は，常に異なる 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2) (1) で求めた 2 次方程式の解を $m_1,\ m_2\ (m_1<m_2)$ とする。このとき，m_1+m_2，m_1m_2，m_2-m_1 を，それぞれ t の式で表せ。

(3) 傾き $m_1,\ m_2$ の 2 本の接線が x 軸の正の向きとなす角を，それぞれ $\theta_1,\ \theta_2$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\theta_1<\theta_2<\frac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき，$m_1=\tan\theta_1$，$m_2=\tan\theta_2$ を利用して $\tan(\theta_2-\theta_1)$ を t の式で表せ。さらに，この式を $f(t)$ とおくとき，極限値 $\lim_{t\to\infty}f(t)$ を求めよ。

(4) $t>0$ であることに注意して，(3) の関数 $f(t)$ の最小値と，そのときの t の値および $\theta_2-\theta_1$ の値を求めよ。

19［2017 茨城大］

e を自然対数の底とし，$f(x)=e^{-x}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ とする。

(1) 導関数 $f'(x)$ は $f'(x)=\sqrt{2}\,e^{-x}\cos x$ を満たすことを示せ。

(2) k を自然数とする。$2(k-1)\pi<x<(2k-1)\pi$ の範囲で，関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を k を用いて表せ。

(3) k を自然数とする。$(2k-1)\pi<x<2k\pi$ の範囲で，関数 $f(x)$ の増減を調べ，極値を k を用いて表せ。

(4) 自然数 n に対して，$(n-1)\pi<x<n\pi$ の範囲における関数 $f(x)$ の極値を a_n とする。無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の和を求めよ。

20［2017 大阪府立大］

(1) 不定積分 $\int\tan x\,dx$ を求めよ。ただし，積分定数は省略してよい。

(2) 関数 $I(\theta)$ を $I(\theta)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}-\theta}\tan x\,dx$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ と定める。極限値

$L=\lim_{\theta\to+0}\{I(\theta)-I(2\theta)\}$ および $M=\lim_{\theta\to+0}\theta e^{I(\theta)}$ を求めよ。

21［2017 京都工芸繊維大］

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta \quad \left(0<x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$$

により定める。$0<t<\frac{\pi}{2}$ を満たす実数 t に対し，xy 平面における曲線 $y=f(x)$ $\left(t\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ の長さを $l(t)$ とおく。

(1) 極限 $\lim_{x\to+0}f(x)$ を求めよ。

(2) $l(t)$ を求めよ。

(3) 極限 $\lim_{t\to+0}\{l(t)-f(t)\}$ を求めよ。

22［2011 宮崎大］

方程式 $\tan x=x$ について，次の問いに答えよ。ただし，必要であれば，$0<x<\frac{\pi}{2}$ を満たす x について，不等式 $\sin x<x<\tan x$ が成り立つことを用いてもよい。

(1) 各自然数 n について，$n\pi-\frac{\pi}{2}<x<n\pi+\frac{\pi}{2}$ の範囲に方程式 $\tan x=x$ の解がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 各自然数 n について，(1) で存在が示された解を x_n とする。このとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}n\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-x_n\right)$ を求めよ。