

1 [2012 京都工芸繊維大]

a を実数とする。すべての実数 x で定義された関数 $f(x)=|x|(e^{2x}+a)$ は $x=0$ で微分可能であるとする。

(1) a および $f'(0)$ の値を求めよ。

(2) 導関数 $f'(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ。

(3) 右側極限 $\lim_{x\to+0}\dfrac{f'(x)}{x}$ を求めよ。更に，$f'(x)$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ。

2 [2013 津田塾大]

$1+2x-3x^2\leqq f(x)\leqq 1+2x+3x^2$ が成り立つような関数 $f(x)$ に対し，$f'(0)$ を右側極限と左側極限を考えることにより求めよ。

3 [2009 防衛大学校]

関数 $f(x)=\begin{cases}\log x & (x\geqq 1)\\ \dfrac{ax+b}{x+1} & (x<1)\end{cases}$ が $x=1$ で微分可能であるような a の値を求めよ。

4 [2015 明治大]

a，b，c は実数の定数として，関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\begin{cases}a & (x\leqq 0)\\ \dfrac{\sin\pi x\,\sin\frac{\pi}{2}x(x-1)\sin\frac{\pi}{2}(x-1)}{\{\pi x(x-1)\}^2} & (0<x<1)\\ b-c\pi(x-1) & (x\geqq 1)\end{cases}$$

$\lim_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=$ ア$\boxed{}$ であることから，関数 $f(x)$ が，$x=0$ で連続ならば

$a=\dfrac{イ\boxed{}}{ウ\boxed{}}$ となり，$x=1$ で微分可能ならば $b=$ エ$\boxed{}$，$c=\dfrac{オ\boxed{}}{カ\boxed{}}$

となる。

5 [2011 横浜市立大]

N を与えられた自然数とし，$f(x)$ および $g(x)$ を区間 $(-\infty,\ \infty)$ で N 回以上微分可能な関数とする。$f(x)$ と $g(x)$ から定まる関数を次のように定義する。t を与えられた実数として，

$$(f*_t g)(x)=\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k}{2^k k!}f^{(k)}(x)g^{(k)}(x)$$
$$=f(x)g(x)+\frac{t}{2}f'(x)g'(x)+\cdots\cdots+\frac{t^N}{2^N N!}f^{(N)}(x)g^{(N)}(x)$$

とおく。ここで $f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の第 k 次導関数である($g^{(k)}(x)$ も同様である)。

a を実数，n を N 以下の自然数とする。$f(x)=e^{2ax}$，$g(x)=x^n$ に対し，二項定理を用いて $(f*_t g)(x)$ を計算すると $\boxed{}$ となる。

6 [1997 東京都立大]

n を自然数とし $f(x)=1+x+\cdots\cdots+x^n$ とおく.

(1) 等式 $(1-x)f(x)=1-x^{n+1}$ が成り立つことを示せ.

(2) $0<x<1$ を満たす x に対して等式 $f'(x)=\dfrac{nx^n(x-1)+1-x^n}{(1-x)^2}$ が成り立つことを示せ.

(3) 不等式 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\cdots\cdots+\dfrac{n}{2^n}<2$ が成り立つことを示せ.

7 [2009 三重大]

正の整数 n に対し，x の整式 $T_n(x)$ が等式 $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ をすべての実数 θ に対し満たしているとする。

(1) $T_1(x)$ および $T_2(x)$ を求めよ。

(2) $T_n(x)$ の導関数 $T_n{}'(x)$ に対し，$\sin n\theta=\dfrac{1}{n}T_n{}'(\cos\theta)\sin\theta$ がすべての θ に対し成立することを示せ。

(3) $\cos n\theta=\cos\theta\cos(n-1)\theta-\sin\theta\sin(n-1)\theta$ を用いて，

$$T_n(x)=xT_{n-1}(x)+\frac{1}{n-1}(x^2-1)T_{n-1}{}'(x)\ \ (-1\leqq x\leqq 1)$$

が $n\geqq 2$ に対し成立することを示せ。

(4) $T_3(x)$ および $T_4(x)$ を求めよ。

8 [2008 神戸大]

n を自然数とする。つぼの中に，1の数字を書いた玉が1個，2の数字を書いた玉が1個，3の数字を書いた玉が1個，……，n の数字を書いた玉が1個，合計 n 個の玉が入っている。つぼから無作為に玉を1個とり出し，書かれた数字を見て，もとに戻す試行を n 回行う。

(1) 試行を n 回行ったとき，k の数字が書かれた玉をちょうど k 回とり出す確率を p_k とする。p_k を k の式で表せ。ただし，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n$ とする。

(2) (1)で求めた p_1，p_2，p_3，……，p_n について，

$$q_n=2p_1+2^2p_2+2^3p_3+\cdots\cdots+2^np_n$$

とおく。この q_n について，極限 $\lim_{n\to\infty}q_n$ の値を求めよ。

9 [2017 東京理科大]

定数 $c>0$ に対し，$f(x)=e^{-cx}$ とおく。ここで，e は自然対数の底である。

(1) 方程式 $x=f(x)$ は $0<x<1$ の範囲でただ1つの解をもつことを示せ。

数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を，$a_1=1$ とし，$n\geqq 1$ に対し，$a_{n+1}=f(a_n)$ と定める。また，α を(1)の解とする。

(2) すべての自然数 n に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$|a_{n+1}-\alpha|\leqq c|a_n-\alpha|$$

以下，$0<c<1$ とする。

(3) $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ を示せ。

(4) 座標平面において，点

$$(a_1,\ a_2),\ (a_2,\ a_2),\ (a_2,\ a_3),\ (a_3,\ a_3),\ (a_3,\ a_4),\ (a_4,\ a_4),\ \cdots\cdots$$

を順に線分で結び，$(2n-1)$ 本目までの線分の長さの和を S_n とおく。すなわち，

$$S_n=|a_1-a_2|+2(|a_2-a_3|+\cdots\cdots+|a_n-a_{n+1}|)$$

である。このとき，次が成り立つことを示せ。

すべての自然数 n に対して，$S_n<\dfrac{1+c}{1-c}(1-e^{-c})$

10 [2017 広島大]

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\frac{2n+2}{2n+1}\times\frac{2n+4}{2n+3}\times\cdots\cdots\times\frac{4n}{4n-1}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定める。ただし，log は自然対数を表す。

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2n+2k}$ の値を求めよ。

(2) α，β は $0<\alpha<\beta$ を満たす実数とする。不等式

$$\frac{1}{\beta+1}<\frac{\log(\beta+1)-\log(\alpha+1)}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\alpha+1}$$

が成り立つことを示せ。

(3) n，k を自然数とする。不等式

$$\frac{1}{2n+2k}<\log\frac{2n+2k}{2n+2k-1}<\frac{1}{2n+2k-1}$$

が成り立つことを示せ。

(4) 極限値 $\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

11 [2015 大阪市立大]

a は $a>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数とする。2曲線 $C_1:y=2a\cos^2x$，$C_2:y=\sin 2x$ の交点のうち，$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にあるものをPとする。2曲線 C_1，C_2 の点Pにおける接線の傾きをそれぞれ $\tan\theta_1$，$\tan\theta_2$ と表す。ただし，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}$，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta_2<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

点Pの x 座標を b とし，$S=\int_0^b\sin 2x\,dx$ とおく。

(1) $\tan b$，$\cos b$，$\sin b$ をそれぞれ a で表せ。

(2) $\tan\theta_1$，$\tan\theta_2$ をそれぞれ a で表せ。

(3) $\tan\theta_1\tan\theta_2\neq-1$ を示し，$\tan(\theta_2-\theta_1)$ を a で表せ。

(4) S を a で表せ。

(5) 各 a に対して $S\tan(\theta_2-\theta_1)$ の値を $f(a)$ と表すとき，a の関数 $f(a)$ は $a>\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ において単調に減少することを示せ。

12［2015 福井大］
a を正の定数とし，

$$x=a\cos\theta-\cos 2\theta,\quad y=a\sin\theta+\sin 2\theta\quad\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}\right)$$

で表される曲線を C とする。曲線 C が点 P$(1,\ 2)$ を通るとき，次の問いに答えよ。
(1) 定数 a の値を求めよ。
(2) 点 P における曲線 C の接線を ℓ とする。ℓ の方程式を求めよ。
(3) 曲線 C と直線 $x=1$ および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

13［2017 北海道大］
関数 $f(x)=1+\sin x-x\cos x$ について，次の問いに答えよ。
(1) $f(x)$ の $0\leqq x\leqq 2\pi$ における増減を調べ，最大値と最小値を求めよ。
(2) $f(x)$ の不定積分を求めよ。
(3) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{2\pi}|f(x)|dx$$

14［2017 同志社大］
正の実数 λ に対して，$\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ が等式 $\sin\alpha-\lambda\cos\alpha=0$ を満たしている。このとき，$\sin\alpha$，$\cos\alpha$ をそれぞれ λ で表すと，$\sin\alpha=$ ア□，$\cos\alpha=$ イ□ となる。これより，$I(\lambda)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\lambda\cos x|dx$ を λ で表すと $I(\lambda)=2\sqrt{1+\lambda^2}-($ウ□$)$ となり，$I(\lambda)$ は $\lambda=$ エ□ で最小値 オ□ をとる。

15［2017 静岡大］
m を正の整数とする。関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x(mt^{2m-1}-t^{2m+1})e^{-t^2}dt$ の極値を求めよ。ただし，e は自然対数の底である。

16［2017 立教大］
関数 $f(x)=\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}-\dfrac{e^x}{1+e^x}$ について，次の問い (1)～(5) に答えよ。ただし，(1)～(3) において $t=e^x+e^{-x}$ とおく。
(1) x が実数全体を動くとき，t の最小値を求めよ。
(2) 導関数 $f'(x)$ を t を用いて表せ。
(3) $f(x)$ が $x>0$ において最大値をとるとき，t の値を求めよ。
(4) a を正の実数とする。$S(a)=\displaystyle\int_0^a f(x)dx$ を a を用いて表せ。
(5) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{S(a)}{a}$ を求めよ。

17［2012 静岡大］
$x>0$ に対して $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}\log t\,dt$ とおき，$y=f(x)$ のグラフを C とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし $\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$ を使ってよい。
(1) $f(x)$ と $f'(x)$ をそれぞれ求めよ。
(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx$ を求めよ。
(3) $k\geqq 0$ を定数とする。直線 $y=k(x+1)$ と曲線 C が共有点をもつための条件を求めよ。

18［2014 佐賀大］
xy 平面上に $x=2\cos 2\theta$，$y=2\cos 3\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ と媒介変数表示された曲線 C を考える。
(1) $t=\cos\theta$ とおいて，x と y を t の式で表せ。
(2) $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，y を x の式で表せ。また，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ において，y を x の式で表せ。
(3) 曲線 C の概形をかけ。

19［2010 信州大］
関数 $y=\dfrac{\cos x}{e^x}$ $(x>0)$ の極大値を，大きい方から順に

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots,\ a_n,\ \cdots\cdots$$

とする。
(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
(2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の和を求めよ。

20［2017 徳島大］
n を 2 以上の自然数とする。媒介変数 t を用いて $x=\cos^n t$，$y=\sin^4 t$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と表される xy 平面上の曲線を C_n とする。また，$t=\dfrac{\pi}{3}$ に対応する点における C_n の接線を ℓ_n とする。曲線 C_n，接線 ℓ_n および y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とする。ただし，C_n と ℓ_n の共有点が 1 個であることを証明なしで用いてよい。
(1) 接線 ℓ_n の方程式を求めよ。
(2) S_2 を求めよ。
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n nS_n$ を求めよ。

21［2017 神戸大］
n を自然数とする。

$$f(x)=\sin x-nx^2+\frac{1}{9}x^3$$

とおく。$3<\pi<4$ であることを用いて，次の問いに答えよ。
(1) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f''(x)<0$ であることを示せ。
(2) 方程式 $f(x)=0$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をただ 1 つもつことを示せ。
(3) (2) における解を x_n とする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ であることを示し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nx_n$ を求めよ。

22［2017 愛媛大］
$f(x)=\dfrac{\log x}{x^x}$ $(x>0)$ とおく。
(1) $f(x)$ を微分せよ。
(2) $f(x)$ が $x=a$ で極値をとるならば，$a<\sqrt{3}$ であることを示せ。
(3) $\sqrt{3}^{(\sqrt{5}^{\sqrt{5}})}$ と $\sqrt{5}^{(\sqrt{3}^{\sqrt{3}})}$ の大小を比較せよ。

23［2017 大阪市立大］
e を自然対数の底とする。
(1) $0\leqq a\leqq b$ に対して，不等式 $a+e^{-a}\leqq b+e^{-b}$ が成り立つことを示せ。
(2) $a\geqq 0$，$b\geqq 0$ に対して，不等式 $|e^{-a}-e^{-b}|\leqq|a-b|$ が成り立つことを示せ。
(3) 数列 $\{x_n\}$ を，$x_1=0$，$x_{n+1}=\dfrac{e^{-x_n}}{2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ により定める。また，方程式 $x=\dfrac{e^{-x}}{2}$ の解を α (α は実数) とする。このとき，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，不等式 $|x_{n+1}-\alpha|\leqq\dfrac{1}{2}|x_n-\alpha|$ が成り立つことを示せ。
(4) (3) の数列 $\{x_n\}$ について，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，$|x_n-\alpha|\leqq\dfrac{\alpha}{2^{n-1}}$ が成り立つことを示せ。

24［2017 立命館大］
O を原点とする座標平面上において，点 P は点 O を中心とする半径 2 の円周上を反時計回りに動き，点 Q は点 P を中心とする半径 1 の円周上を反時計回りに動く。時刻 $t=0$ のとき，点 P は $(2,\ 0)$ にあり，点 Q は $(3,\ 0)$ にある。時刻 t のとき，線分 OP は，x 軸の正の部分を始線とした角 t の動径とする。また，時刻 t のとき，線分 PQ は，点 P を始点とし動径 OP を延長した半直線を始線とした角 t の動径とする。ただし，$0\leqq t\leqq\pi$ とする。
(1) 時刻 t における点 Q の座標は (ア□，イ□) である。
(2) 時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ における点 Q の速度ベクトルは (ウ□，エ□)，速さは オ□ である。
(3) 点 Q の x 座標は，$t=$ カ□ のとき最小値 キ□ となる。
(4) 点 Q の y 座標の最大値は ク□ である。
(5) 点 Q の軌跡と x 軸で囲まれた図形の面積は ケ□ である。