

$\boxed{1}$ [1996 広島市立大]

不定積分 $\int \sin\sqrt{x}\,dx$ を求めよ.

$\boxed{2}$ [1996 秋田大]

(1) $x+\sqrt{x^2-1}=t$ とおくことにより，不定積分 $\int\sqrt{x^2-1}\,dx$ を求めよ.

(2) 曲線 $x^2-y^2=1$ 上に点 $\mathrm{P}(p,q)\,(p>1,q>0)$ と点 $\mathrm{A}(1,0)$ がある．2 直線 OA, OP とこの曲線とで囲まれる図形の面積 S を p の式で表せ.

(3) (2) における S を $\dfrac{\theta}{2}$ とおくとき，p,q を θ の式で表せ.

$\boxed{3}$ [1996 岐阜大]

自然数 n に対して，$I_n=\int_0^n x^3e^{-x^2}dx\,(n=1,2,\cdots)$ とおく.

(1) $t=x^2$ とおくことで I_n を求めよ.

(2) $xe^{-x}\leqq\dfrac{4}{xe^2}\,(x>0)$ を示せ.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$ を求めよ.

$\boxed{4}$ [1996 芝浦工業大]

不定積分 $\int\cos x\sin(2\cos x)\sin x\,dx$ を $t=\cos x$ と置いて計算すると,

$\dfrac{1}{\boxed{\text{ア}}}\cos x\cos\left(\boxed{\text{イ}}\cos x\right)-\dfrac{1}{\boxed{\text{ウ}}}\sin\left(\boxed{\text{エ}}\cos x\right)+C$ となる．ただし,

C は積分定数である.

$\boxed{5}$ [2013 横浜市立大]

a，b，c は正の実数とする。

(1) 関数 $\sqrt{x(a+x)}-a\log(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})$ の導関数を求めよ。

(2) 部分積分を用いて

$$\int\sqrt{x(bx+c)}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x(bx+c)}+\frac{c}{4}\int\sqrt{\frac{x}{bx+c}}\,dx\ (x>0)$$

が成り立つことを示せ。

(3) 不定積分 $\int\sqrt{x(2x+1)}\,dx\ (x>0)$ を求めよ。

$\boxed{6}$ [1996 広島市立大]

不定積分 $I=\int e^{-x}\cos 3x\,dx$ および，$J=\int e^{-x}\sin 3x\,dx$ を求めよ.

$\boxed{7}$ [1996 大阪女子大]

関数 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\left|\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\right|d\theta$ を求めよ.

$\boxed{8}$ [2017 山口大]

$f(x)$ を閉区間 $[0,\ 1]$ で連続な関数とする。

(1) $x=\pi-t$ とおいて等式 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}xf(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\pi-t)f(\sin t)dt$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 等式 $\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$ が成り立つことを証明せよ。

(3) 定積分 $\int_0^{\pi}x\sin^3 x\,dx$ を求めよ。

$\boxed{9}$ [2017 岐阜大]

関数 $f(x)$ を $f(x)=e^{-x}|\sin x|$ で定める。また，正の整数 n に対して $I_n=\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}f(x)dx$ とする。

(1) I_1 の値を求めよ。

(2) I_n の値を求めよ。

(3) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}I_k$ の値を求めよ。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ の値を求めよ。

$\boxed{10}$ [2017 名古屋工業大]

自然数 n に対して

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+2k},\quad b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+2k)^3},\quad c_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi}{n+2k}$$

とおく。ただし，$x>0$ のとき $\sin x<x$ が成り立つことを用いてよい。

(1) $x>0$ のとき不等式 $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x$ が成り立つことを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の極限を求めよ。

(3) 数列 $\{b_n\}$ の極限を求めよ。

(4) 数列 $\{c_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ。

$\boxed{11}$ [2017 同志社大]

n を自然数とする。関数 $f(x)$ $(x\geqq 0)$ を単調に増加する連続関数とする。k を 0 以上の整数としたとき，$x_k=\dfrac{\pi k}{2n}$，$S_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)\cos^2 nx\,dx$ とする。

(1) $\int_{x_k}^{x_{k+1}}\cos^2 nx\,dx$ を求めよ。

(2) S_k が不等式 $\dfrac{\pi}{4n}f(x_k)\leqq S_k\leqq\dfrac{\pi}{4n}f(x_{k+1})$ を満たすことを示せ。

(3) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$ とする。$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos^2 nx\,dx$ を I で表せ。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2 nx-\cos^4 nx)\log\left(1+\dfrac{4}{\pi}x\right)dx$ を求めよ。

$\boxed{12}$ [2017 芝浦工業大]

次の問いに答えよ。ただし，x は実数，n は自然数とする。

(1) 和 $1-x^2+x^4-x^6+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}$ を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^1\dfrac{dx}{1+x^2}$ を求めよ。

(3) 不等式 $\int_0^1\dfrac{x^{2n}}{1+x^2}dx\leqq\dfrac{1}{2n+1}$ を示せ。

(4) 極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ を求めよ。

$\boxed{13}$ [2017 神戸大]

n を自然数とする。

(1) 実数 x に対して，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k e^{-kx}-\frac{1}{1+e^{-x}}=\frac{(-1)^n e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}$$

(2) 次の等式を満たす S の値を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}-S=(-1)^n\int_0^1\frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx$$

(3) 不等式 $\int_0^1\dfrac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}dx\leqq\dfrac{1}{n+1}$ が成り立つことを示し，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k(1-e^{-k})}{k}$ を求めよ。

$\boxed{14}$ [2017 札幌医科大]

$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2k-1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とする。

(1) 不等式 $\int_1^{2n+1}\dfrac{1}{x}dx<2a_n$ が成り立つことを示せ。

(2) 極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\log n}$ を求めよ。

$\boxed{15}$ [2015 千葉大]

0 以上の整数 n に対して，整式 $T_n(x)$ を

$T_0(x)=1$，$T_1(x)=x$，$T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$

で定める。

(1) 0 以上の任意の整数 n に対して $\cos n\theta=T_n(\cos\theta)$ となることを示せ。

(2) 定積分 $\int_{-1}^{1}T_n(x)dx$ の値を求めよ。

16 [2017 お茶の水女子大]

次の媒介変数表示で与えられる座標平面の曲線 C を考える。

$$x=\sin^2\theta,\ y=\sin^2\theta\cos\theta$$

ただし θ は0から π までの範囲を動くものとする。

(1) C の概形をかけ。

(2) C で囲まれる領域の面積を求めよ。

17 [2017 大阪府立大]

曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ を C とする。自然数 n に対して，点 $P_n\left(n,\ \dfrac{1}{n}\right)$ における曲線 C の接線を ℓ_n とする。また，2直線 ℓ_n，ℓ_{n+1} と曲線 C で囲まれた図形の面積を S_n とする。

(1) ℓ_n と ℓ_{n+1} の交点を求めよ。

(2) S_n を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^3S_n$ を求めよ。ただし，必要があれば次の不等式を証明せずに用いてもよい。

$$x>0 \text{ のとき } \quad x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4<\log(1+x)<x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3$$

18 [2015 千葉大]

c を実数とし，曲線 $y=x^2+c$ …… ① と曲線 $y=\log x$ …… ② の共通接線を考える。

(1) 共通接線の本数を，実数 c の値によって答えよ。

(2) 共通接線が1本であるとき，その接線と ①，② それぞれとの接点を求めよ。

(3) 共通接線が1本であるとき，①，② と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

19 [2017 名古屋工業大]

関数 $f(x)=\dfrac{5e^x+1}{(e^x+1)^2}$ に対して $c=\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ とおく。

(1) $f(x)$ の極値を求めよ。

(2) c の値を求め，$f(x)\geqq c$ となる x の範囲を求めよ。

(3) $R>1$ とする。曲線 $y=f(x)$ および2直線 $x=-\log R$，$y=c$ で囲まれた図形の面積 $S(R)$ を求めよ。

(4) (3)で求めた $S(R)$ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{R\to\infty}S(R)$ を求めよ。

20 [2017 同志社大]

$0<h<1$ とする。xy 平面上の曲線 $y=\dfrac{3\log x}{x^2}$ $(x\geqq1)$ を C_1，曲線 $y=3h^2\log x$ $(x\geqq1)$ を C_2 とする。必要であれば，$\displaystyle\lim_{h\to+0}h\log h=0$ を証明なしに用いてよい。

(1) 曲線 C_1 と C_2 の共有点をすべて求めよ。

(2) n を自然数とする。$f(x)=\dfrac{(\log x)^n}{x^{2n-1}}$，$g(x)=x(\log x)^n$ のとき，$f'(x)=(-2n+1)\dfrac{(\log x)^n}{x^{2n}}+v(x)$，$g'(x)=(\log x)^n+w(x)$ と表される。$v(x)$，$w(x)$ を求めよ。

(3) 曲線 C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を $S(h)$ とする。$S(h)$ を h で表せ。

(4) (3)で求めた $S(h)$ に対して，極限 $\displaystyle\lim_{h\to+0}S(h)$ を求めよ。

(5) 曲線 C_1 と C_2 で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を $T(h)$ とする。極限 $\displaystyle\lim_{h\to+0}T(h)$ を求めよ。

21 [2017 東京理科大]

座標平面上に，中心が点 $(0,\ 1)$，半径が1の円がある。この円周上の定点Pは最初，原点にあるとして，この円が x 軸上を正の方向にすべることなく回転するとき，点Pの描く曲線を C とする。円の回転した角を θ とするとき，点Pの座標は
$(\theta-\sin\theta,\ 1-\cos\theta)$ で与えられる。

(1) $x=\theta-\sin\theta$，$y=1-\cos\theta$ とおく。$0<\theta<2\pi$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を θ の関数として表せ。

(2) $0<\theta<2\pi$ のとき，点Pにおける曲線 C の法線と，x 軸の交点をQとする。線分PQの長さが最大となる点Pの座標を求めよ。

(3) $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに1回転してできる立体の体積 V を求めよ。

22 [2017 東京理科大]

座標平面において E を $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ で表される楕円とする。また，E 上の点 $P\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ における E の接線を ℓ_1 とする。

(1) ℓ_1 の傾きを求めよ。

ℓ_1 上の点で x 座標が $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ であるものをAとする。

(2) 点Aの y 座標を求めよ。

(3) 点Aを通り，傾きが m である直線と楕円 E が共有点をもつとき，その共有点の x 座標を m の式で表せ。

点Aを通り，楕円 E に接する直線で ℓ_1 とは異なるものを ℓ_2 とする。

(4) ℓ_2 の傾きを求めよ。

楕円 E と ℓ_2 の接点をQとする。

(5) 点Qの座標を求めよ。

(6) 三角形PAQの内部と楕円 E の内部の共通部分の領域を y 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

23 [2015 島根大]

xy 平面において，点 $P(x,\ y)$ と点 $(2,\ 0)$ の距離が，点Pと直線 $x=1$ の距離の $\sqrt{2}$ 倍と等しくなるような点Pの描く曲線を C とする。

(1) 曲線 C の方程式を求めよ。

(2) t を0でない実数とし，曲線 C と直線 $x+y=t$ との交点をQとする。点Qの座標を t を用いて表せ。

(3) (2)で求めた点Qから x 軸に下ろした垂線をQHとする。t が $2\leqq t\leqq 4$ の範囲を動くとき，線分QHが通過してできる図形の面積を求めよ。

24 [2009 広島大]

座標平面上を運動する点Pを考える。時刻 $t\geqq0$ における点Pの座標 $(x(t),\ y(t))$ は

$$x(t)=e^{-3t}\cos4t,\ y(t)=e^{-3t}\sin4t$$

で与えられている。次の問いに答えよ。

(1) 時刻 t における点Pの極座標 $(r(t),\ \theta(t))$ を求めよ。

(2) 点Pが直線 $y=(\tan\alpha)x$ を通過する時刻を $0<t_1<t_2<t_3<$ …… とする。時刻 t_n を求めよ。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(3) 時刻 t における点Pの速さ $v(t)$ を求めよ。

(4) 時刻 t_n から時刻 t_{n+1} までの間に点Pが描く曲線の長さ $L_n=\displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}}v(t)dt$ を求めよ。

(5) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}L_n$ の和を求めよ。

25 [2017 奈良県立医科大]

$f(x)$ は実数全体で定義された連続関数であり，すべての実数 x に対して次の関係式を満たすとする。

$$\int_0^x e^t f(x-t)dt=f(x)-e^x$$

関数 $f(x)$ を求めよ。

26 [2015 鳥取大]

連続関数 $f(x)$ は次の条件を満たす。

$$f(x)=1+\int_0^x(x-t)f(t)dt$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\phi(x)=f(x)+f'(x)$ とおくとき，$\dfrac{\phi'(x)}{\phi(x)}$ を求めよ。

(2) $f(x)$ を求めよ。