数学Ⅲ－BASIC－第6章－微分応用－講義用問題

$\boxed{1}$ [2013 名古屋市立大]

関数 $f(x)=x\log x-\tan x$ について，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{4},\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{2}$ [2015 福島大]

曲線 $y=xe^x+1$ の $x=1$ に対応する点における接線と法線の方程式を求めよ。

$\boxed{3}$ [2015 愛媛大]

楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$ 上の点 $(\sqrt{2},\ 1)$ における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{4}$ [2017 東京都市大]

xy 平面において，原点から曲線 $y=x+e^x$ に接線を引くとき，接点の座標を求めよ。

$\boxed{5}$ [2002 東海大]

曲線 C が媒介変数 θ を用いて $x=\theta-\sin\theta$，$y=1-\cos\theta$ と表されている．

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ に対応する点における曲線 C の接線の傾きは $\boxed{\quad}$ である．

$\boxed{6}$ [2004 福岡大]

媒介変数 $t>0$ を用いて，$x=t^2+t-1$，$y=t^2-t-1$ と表された曲線上の点 $(x,\ y)$ が，原点 $(0,\ 0)$ に最も近づくときの t の値と，この点における曲線の接線の傾きを求めよ．

$\boxed{7}$ [2005 湘南工科大]

関数 $f(x)=x^2$ のとき，$a=0$，$b=3$ に対して $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$，$a<c<b$ を満たす c の値を求めよ。

$\boxed{8}$ [2002 金沢大]

すべての正の数 x，y に対して，不等式 $x(\log x-\log y)\geqq x-y$ が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのは $x=y$ の場合に限ることを示せ．

$\boxed{9}$ [2006 弘前大]

関数 $y=\dfrac{x-1}{x^2}$ の増減やグラフの凹凸などを調べ，グラフの概形をかけ。

$\boxed{10}$ [2008 関西学院大]

関数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ を求めよ。また，$f(x)$ の極値を求めよ。

(2) $f''(x)$ を求めよ。また，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の座標を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ を求めよ。

(4) 曲線 $y=f(x)$ の概形をかけ。

$\boxed{11}$ [2015 関西学院大]

$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ の導関数は $f'(x)=$ ア$\boxed{\quad}$ であり，第2次導関数は $f''(x)=$ イ$\boxed{\quad}$ である。曲線 $y=f(x)$ の変曲点における接線の傾きは ウ$\boxed{\quad}$ である。

$\boxed{12}$ [2007 宮城教育大]

関数 $y=(2x^2+x+1)e^x$ の増減，極値，凹凸，変曲点を調べ，そのグラフをかけ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$ が成り立つことを証明なしに用いてよい。

$\boxed{13}$ [2014 愛媛大]

$f(x)=e^x\sin x$ とする。$0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で，関数 $y=f(x)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べ，そのグラフをかけ。

$\boxed{14}$ [2004 大阪工業大]

a，b を正の定数として，関数 $f(x)=\dfrac{x-a+b}{x^2+4ab}$ を考える．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ が極小値 $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$，極大値 $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ をもつとき，a，b の値を求めよ．

(3) (2) で求めた a，b に対して，曲線 $y=f(x)$ の変曲点の x 座標を求めよ．

$\boxed{15}$ [2014 岩手大]

関数 $y=x-2+\sqrt{4-x^2}$ の最大値，最小値を求めよ。

$\boxed{16}$ [2015 東京電機大]

関数 $f(x)=\log x-\sqrt{x}$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

$\boxed{17}$ [2015 東京電機大]

関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ の最大値を求めよ。

$\boxed{18}$ [2009 学習院大]

関数 $y=x-(\sin x+\sqrt{3}\cos x)$ の，区間 $-\pi\leqq x\leqq\pi$ における最大値，最小値と，それらを与える x の値を求めよ。

$\boxed{19}$ [2008 東京電機大]

関数 $y=\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$ $(0\leqq x\leqq 2\pi)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{20}$ [2006 茨城大]

$0<x<1$ で定義された関数 $f(x)=x(\log x)^2$ の最大値を求めよ。ただし，対数は自然対数である。

$\boxed{21}$ [2004 大阪電気通信大]

座標平面において，点 $\mathrm{A}\,(0,\ 3)$ と曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\,(t,\ \sqrt{t})$ との距離を L とする．

(1) L^2 を t の式で表せ．

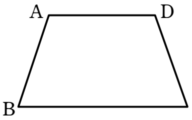
(2) L の最小値を求めよ．

$\boxed{22}$ [2004 日本女子大]

a を正の定数とする．台形 ABCD が AD∥BC,

$\mathrm{BA}=\mathrm{AD}=\mathrm{DC}=a$，$\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{C}=\theta$ $\left(\text{ただし，}0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

を満たしているとする．このとき，台形 ABCD の面積を最大にする θ の値を求めよ．



$\boxed{23}$ [2015 横浜国立大]

$x>0$ のとき，不等式

$$\log x\geqq\frac{5x^2-4x-1}{2x(x+2)}$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{24}$ [2003 大阪教育大]

(1) 不等式 $e^x>1+x$ $(x>0)$ を証明せよ．

(2) 不等式 $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$ $(x>0)$ を証明せよ．

$\boxed{25}$ [2011 津田塾大]

n は自然数で $0<x<1$ とする。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{1-x^n}{n}>\frac{1-x^{n+1}}{n+1}$$

$\boxed{26}$ [1998 福島大]

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{1}{\theta}(\sin\theta+\tan\theta)>2$$

$\boxed{27}$ [2015 神奈川大]

曲線 $y=(x-1)e^x$ と直線 $y=a$ が共有点をもつとき，定数 a の値の範囲は $\boxed{\quad}$ である。

$\boxed{28}$［2009 東京電機大］

関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$ について，次の問に答えよ。

(1) $f(x)$ の極値を求め，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) a を実数の定数とするとき，方程式 $e^x=ax^2$ の実数解の個数を求めよ。

$\boxed{29}$［2008 北海学園大］

$x=-3$ で極値をもつ関数 $f(x)=(x^2-a^2)e^x$ について，次の問いに答えよ。ただし，a は正の実数とし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2e^x=0$ を用いよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の極値をすべて求めよ。

(3) 方程式 $f(x)=k$ が異なる 3 個の実数解をもつような k の値の範囲を求めよ。

$\boxed{30}$［2006 青山学院大］

θ に関する方程式 $\sin\theta-k\cos\theta=2(1-k)$ が $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をもつように定数 k の値の範囲を定めよ。

$\boxed{31}$［2001 関西学院大］

方程式 $\log x=\dfrac{1}{x}$ は，$x>0$ において，ただ 1 つの解をもつことを示せ．ただし，対数は自然対数で，$\log 2>\dfrac{1}{2}$ を用いてもよい．

$\boxed{32}$［2005 湘南工科大］

動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における位置が

$$x=2t,\quad y=-3t^2+5t$$

で与えられているとき，$t=2$ での動点 P の速さを求めよ。

$\boxed{33}$［2007 鳥取大］

xy 平面上を動く点 P の時刻 t における座標が

$$(x(t),\ y(t))=\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2},\ \frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)$$

で与えられるとき

(1) 時刻 t における速度ベクトル $\vec{v}(t)$ および加速度ベクトル $\vec{\alpha}(t)$ を求めよ。

(2) 時刻 t における速度ベクトル $\vec{v}(t)$ と加速度ベクトル $\vec{\alpha}(t)$ のなす角を $\theta(t)$ とするとき，$\cos\theta(t)$ を求めよ。