

1 [2001 名古屋大]

n を3以上の自然数とする．有限複素数列 z_1，z_2，……，z_n の各項はいずれも方程式 $z^6=1$ の解の1つであり，かつ，関係式 $z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n=0$ を満たしているとする．

(1) z_1，z_2，……，z_n の中に1が含まれ，-1 が含まれていないとすれば，

$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ はいずれも z_1，z_2，……，z_n の中に含まれることを示せ．

(2) $n=6$ のとき，(1)のような複素数列 z_1，z_2，……，z_6 のとり方の個数を求めよ．

2 [2015 奈良県立医科大]

n を3以上の整数とし，複素数 z を

$$z=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},\quad i=\sqrt{-1}$$

と定める。a_0，a_1，……，a_{n-1} が1から n までのすべての整数を動くとき，関数 $v=(a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_{n-1}z^{n-1})^n$ のとりうるすべての値のなす集合を S とおく。さらに，b_0，b_1，……，b_{n-2} が0から $n-1$ までのすべての整数を動くとき，関数 $w=(b_0+b_1z+\cdots\cdots+b_{n-2}z^{n-2})^n$ のとりうるすべての値のなす集合を T とおく。

(1) 複素数 $1+z+\cdots\cdots+z^{n-1}$ の値を求めよ。

(2) 2つの集合 S と T とは等しいこと，すなわち $S=T$ が成り立つことを証明せよ。

3 [2000 名古屋大]

実数を係数とする3次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ は，相異なる虚数解 α，β と実数解 γ をもつとする．

(1) $\beta=\overline{\alpha}$ が成り立つことを証明せよ．ここで，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す．

(2) α，β，γ が等式 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$ を満たし，更に複素数平面上で α，β，γ を表す3点は1辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形をなすものとする．このとき，実数の組 $(p,\ q,\ r)$ をすべて求めよ．

4 [2003 信州大]

n を自然数とするとき，次の等式を証明せよ．ただし $\sin\frac{\beta}{2}\neq 0$ とする．

$$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(\alpha+k\beta)=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(\alpha+k\beta)=\frac{\sin\frac{n\beta}{2}\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

5 [2003 九州大]

$0<a<1$ である定数 a に対し，複素数平面上で $z=t+ai$ （t は実数全体を動く）が表す直線を l とする．ただし，i は虚数単位である．

(1) 複素数 z が l 上を動くとき，z^2 が表す点の軌跡を図示せよ．

(2) 直線 l を，原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする．m と(1)で求めた軌跡との共有点の個数を $\sin\theta$ の値で場合分けして求めよ．

6 [2002 早稲田大]

複素数 z_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が次の式を満たしている．

$$z_1=1,\quad z_2=\frac{1}{2},\quad z_nz_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1},\quad n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots$$

(1) 複素数平面上に z_1，z_2，z_3，z_4，z_5 を図示せよ．

(2) z_n を求めよ．

(3) 和 $\sum_{n=1}^{2002}z_n=z_1+z_2+z_3+\cdots\cdots+z_{2002}$ を計算せよ．

7 [2002 北海道大]

n を3以上の自然数とするとき，次を示せ．

ただし，$\alpha=\cos\frac{360^\circ}{n}+i\sin\frac{360^\circ}{n}$ とし，i を虚数単位とする．

(1) $\alpha^k+\overline{\alpha}^k=2\cos\frac{360^\circ\times k}{n}$

ただし，k は自然数とし，$\overline{\alpha}$ は α に共役な複素数とする．

(2) $n=(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots\cdots(1-\alpha^{n-1})$

(3) $\frac{n}{2^{n-1}}=\sin\frac{180^\circ}{n}\sin\frac{2\times180^\circ}{n}\cdots\cdots\sin\frac{(n-1)\times180^\circ}{n}$

8 [2002 京都大]

$0<\theta<90$ とし，a は正の数とする．複素数平面上の点 z_0，z_1，z_2，…… を次の条件(a)，(b)を満たすように定める．

(a) $z_0=0$，$z_1=a$

(b) $n\geqq1$ のとき，点 z_n-z_{n-1} を原点の周りに θ° だけ回転すると点 $z_{n+1}-z_n$ に一致する．

このとき，点 z_n $(n\geqq1)$ が点 z_0 と一致するような n が存在するための必要十分条件は，θ が有理数であることを示せ．

9 [2000 京都府立医科大]

n を正の整数とするとき，x を未知数とする次の方程式を考える．

$$n^2ix^2-2\sqrt{2}\,n(1+i)i^nx+3(-1)^n=0$$

このとき，

(1) 上の方程式を満たす複素数を2つ求めよ．

(2) 上の方程式を満たす2つの複素数のうち絶対値の小さい方を z_n とし，和 $\sum_{k=1}^{n}z_k$ の実部と虚部をそれぞれ u_n と v_n とする．すなわち，$\sum_{k=1}^{n}z_k=u_n+iv_n$

このとき，極限値 $\lim_{n\to\infty}u_n$ と $\lim_{n\to\infty}v_n$ とを，π と $\log 2$ を用いて表せ．

ただし，次の等式は知られている．

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots$$

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$