

$\boxed{1}$［2017 大阪大］

双曲線 $H: x^2-y^2=1$ 上の 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(s,\ t)\ (t\neq 0)$ を考える。

(1) 点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とするとき，P の座標を s と t を用いて表せ。

(2) 点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とするとき，Q の座標を s と t を用いて表せ。

(3) 点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とするとき，3 点 P，Q，R は一直線上にあることを証明せよ。

$\boxed{2}$［2017 慶応義塾大］

座標平面における円 $x^2+y^2=4$ を C とし，C の内側にある点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を 1 つ固定する。C 上に点 Q をとり，線分 QP の垂直二等分線と線分 OQ との交点を R とする。ただし O は座標原点である。点 Q が円 C 上を 1 周するとき，点 R が描く軌跡を $S(a,\ b)$ とする。

(1) $S(a,\ b)$ は長軸の長さ ${}^{ア}\boxed{}$，短軸の長さ ${}^{イ}\boxed{}$ の楕円である。点 R の x 座標と y 座標をそれぞれ $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$（ただし $r>0$ かつ $0\leqq\theta<2\pi$）とすると，$S(1,\ 1)$ の方程式は $r={}^{ウ}\boxed{}$ と表される。$S(1,\ 1)$ 上の点で y 座標が最大となる点の座標を $(r_0\cos\theta_0,\ r_0\sin\theta_0)$ とすると $r_0={}^{エ}\boxed{}$，$\theta_0={}^{オ}\boxed{}$ である。

(2) t を $0<t<2$ の範囲で動かすとき，$S(t,\ 0)$ が通過してできる領域の面積は ${}^{カ}\boxed{}$ である。

$\boxed{3}$［2013 浜松医科大］

$|k|<1$ または $k>1$ を満たす実数 k に対し，次の 2 次曲線 $C(k)$ を考える。

$$C(k): \frac{x^2}{k+1}+\frac{y^2}{k-1}=1$$

(1) 点 $(1,\ 1)$ を通る曲線 $C(k)$ をすべて求めて，その概形をかけ。

(2) 曲線 $C(3)$ が点 $(a,\ b)\ (a>0,\ b>0)$ を通るとき，a と b の間に成り立つ関係式を求めよ。またこのとき，点 $(a,\ b)$ を通る曲線 $C(k)\ (k\neq 3)$ の方程式を，bを用いて表し，その焦点を求めよ。

(3) (2) の 2 つの曲線 $C(3)$，$C(k)$ について，点 $(a,\ b)$ における $C(3)$，$C(k)$ の接線をそれぞれ ℓ_1，ℓ_2 とする。ℓ_1 と ℓ_2 のなす角度を求めよ。

$\boxed{4}$［2010 慶応義塾大］

座標平面において $\mathrm{A}(a,\ 0)$（ただし $a>0$）を x 軸上の定点とし，曲線 C を双曲線 $2x^2-y^2=1$ の $x>0$ に対する部分とする。曲線 C 上の点 Q に対し，点 P が直線 $y=x$ 上を動くときの $\mathrm{AP}+\mathrm{PQ}$ の最小値を $r(\mathrm{Q})$ と定義する。

(1) $\mathrm{Q}(1,\ -1)$ に対して $r(\mathrm{Q})$ を a の式で表すと $r(\mathrm{Q})={}^{ア}\boxed{}$ であり，$\mathrm{Q}(2,\ \sqrt{7})$ に対しては $r(\mathrm{Q})={}^{イ}\boxed{}$ である。

(2) さらに Q が曲線 C 上を動くときの $r(\mathrm{Q})$ の最小値を考える。

(i) $r(\mathrm{Q})$ が $\mathrm{Q}\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ において最小値をとるのは $a={}^{ウ}\boxed{}$ のときであり，$\mathrm{Q}(2,\ \sqrt{7})$ において最小値をとるのは $a={}^{エ}\boxed{}$ のときである。

(ii) $r(\mathrm{Q})$ が $\mathrm{Q}(1,\ 1)$ において最小値をとるような a の範囲を求めよ。

$\boxed{5}$［2008 九州大］

xy 平面上の双曲線 $C_1: \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1\ (a>0,\ b>0)$ と

円 $C_2: x^2+\left(y-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=c^2\ (c>0)$ について

(1) 双曲線 C_1 と円 C_2 が接するとき，c を a と b で表せ。

(2) 双曲線 C_1 と円 C_2 の共有点の個数が，0 個，1 個，2 個，3 個，4 個のそれぞれの場合に c のとりうる範囲を a と b で表せ。

(3) $c=\dfrac{b}{2}+1$ のとき，共有点が 2 個になる範囲を ab 平面上で図示せよ。

$\boxed{6}$［2011 千葉大］

座標平面上の点 $(x,\ y)$ が

$$\begin{cases}(x^2+y^2)^2-(3x^2-y^2)y=0\\ x\geqq 0\\ y\geqq 0\end{cases}$$

で定まる集合上を動くとき，x^2+y^2 の最大値，およびその最大値を与える x，y の値を求めよ。

$\boxed{7}$［2004 東京慈恵会医科大］

a，b を $a>b>0$ なる定数とし，$f(x)=x^3-3b^2x+2a(4a^2-3b^2)$ とおく．

また，$f'(x)$ を $f(x)$ の導関数とする．いま，複素数 $p+qi$（p，q は実数）に対して，点 $(p,\ q)$ を複素数 $p+qi$ に対応する点と呼ぶことにし，3 次方程式 $f(x)=0$ の実数の解 α，虚部が正の虚数解 β に対応する点をそれぞれ A，B とする．また，2 次方程式 $f'(x)=0$ の解に対応する点を F，F′ とする．

(1) A，B の座標を求めよ．

(2) 線分 AB の中点を M とすると，$\mathrm{FM}+\mathrm{F'M}$ は a のみに関係する定数となることを示し，その値を求めよ．

(3) 2 点 F，F′ を焦点とし，(2) の点 M を通る楕円は直線 AB に点 M で接することを示せ．

$\boxed{8}$［2002 北海道大］

xy 平面上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)\ (x_2\neq 0)$ に対して点 $\mathrm{C}(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$，点 $\mathrm{D}(x_2,\ 0)$ をとり，直線 AC と y 軸の交点を E とする．ただし，原点 O は直線 AB 上にはないとする．

(1) 直角三角形 ODE の面積を S とするとき，S を x_1，y_1，x_2，y_2 で表せ．

(2) A，B が楕円 $L: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上を動くとき，S の最大値を a，b で表せ．

(3) A，B が L 上にあって (2) で求めた S の最大値を与えるとき，点 C は楕円 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}\,a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{2}\,b}\right)^2=1$ 上にあることを示せ.