

1 [2009 神戸大]

a，b，c，d を実数 ($a<b<c<d$) とし，k，l，m，n を自然数とする。実数 x の関数 $f(x)=(x-a)^k(x-b)^l(x-c)^m(x-d)^n$ について，以下のことを示せ。

(1)　a，b，c，d と異なる x に対して，$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{k}{x-a}+\dfrac{l}{x-b}+\dfrac{m}{x-c}+\dfrac{n}{x-d}$ が成り立つ。

(2)　$b<x<c$ の範囲の x に対して，$\dfrac{l}{x-b}+\dfrac{m+n}{x-c}<\dfrac{f'(x)}{f(x)}<\dfrac{m}{x-c}+\dfrac{k+l}{x-b}$ が成り立つ。

(3)　次の 2 つの条件を同時に満たす実数 t が存在する。

(A)　$f'(t)=0$

(B)　$b+\dfrac{l}{l+m+n}(c-b)<t<c-\dfrac{m}{k+l+m}(c-b)$

2 [2012 東北大]

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}}$ ($n=1$，2，3，……) で定める。

(1)　$n\geqq 2$ のとき，$a_n>1$ となることを示せ。

(2)　$\alpha^2=\dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$ を満たす正の実数 α を求めよ。

(3)　すべての自然数 n に対して $a_n<\alpha$ となることを示せ。

(4)　$0<r<1$ を満たすある実数 r に対して，不等式 $\dfrac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n}\leqq r$ ($n=1$，2，3，……) が成り立つことを示せ。更に，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

3 [2017 北海道大]

実数 c に対して，数列 $\{a_n\}$ を $a_1=c$，$a_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{2}|a_n|+1$　($n=1$，2，3，……) によって定める。

(1)　$c\geqq 0$ とする。このとき，すべての n に対して $a_n\geqq 0$ が成り立つことを示せ。さらに，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　$c<0$ とする。このとき，すべての n に対して $a_n<0$ が成り立つような実数 c の値の範囲を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ が収束するような実数 c の値の範囲を求めよ。

4 [2017 横浜国立大]

数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は次の条件を満たす。

(A)　$a_1=1$，$a_n\fallingdotseq 0$　($n=2$，3，4，……)

(B)　$n=1$，2，3，…… に対して，b_n は $\dfrac{1}{a_n}$ より大きい最小の自然数である。

(C)　$n=1$，2，3，…… に対して，$a_{n+1}=a_n-\dfrac{1}{b_n}$ が成り立つ。

(1)　b_1，a_2，b_2，a_3，b_3 を求めよ。

(2)　$b_1b_2\cdots\cdots b_na_{n+1}$　($n=1$，2，3，……) を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}$ を求めよ。

5 [2017 京都府立医科大]

$0<a<1$ である実数 a に対して，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=a,\quad a_{n+1}=4a_n(1-a_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定義する。

(1)　$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，a_n ($n=1$，2，3，……) を求めよ。

(2)　すべての自然数 n について，$0\leqq a_n\leqq 1$ であることを証明せよ。

(3)　$0<a_k<\dfrac{1}{4}$ を満たす自然数 k について，$a_{k+1}>3a_k$ であることを証明せよ。

(4)　$a_m\geqq\dfrac{3}{4}$ を満たす自然数 m が存在することを証明せよ。

(5)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$ であるとき，$a_N=0$ となる自然数 N が存在することを証明せよ。

6 [2017 東北大]

a，b，c を実数とし，

$$I(a,\ b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\cos bx\,dx,\qquad J(a,\ b,\ c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx$$

とおく。ただし，$a\fallingdotseq 0$ とする。

(1)　$I(a,\ b)$ を求めよ。

(2)　$J(a,\ b,\ c)$ を $I(a,\ b+c)$ と $I(a,\ b-c)$ を用いて表せ。

(3)　次の極限を求めよ。

$$\lim_{t\to\infty}8\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$$

7 [2014 滋賀医科大]

漸化式 $\alpha_1=\sqrt{3}\,i$ (i は虚数単位)，$\alpha_{n+1}=2+\dfrac{3}{\alpha_n}$　($n=1$，2，3，……) で定義される複素数の数列 $\{\alpha_n\}$ を考える。各 $n=1$，2，3，…… に対して，α_n を表す複素数平面上の点を A_n とする。

(1)　$\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ は直角三角形となることを示せ。

(2)　すべての A_n は $\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の外接円の上にあることを示せ。

(3)　θ_n を $1+\alpha_n$ の偏角とする。$i\tan\theta_n=\dfrac{\alpha_n-3}{\alpha_n+1}$ であることを示せ。

(4)　$\tan\theta_{n+1}=-\dfrac{1}{3}\tan\theta_n$ であることを示せ。

(5)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|\alpha_n-3|=0$ となることを示せ。

8 [2012 札幌医科大]

箱の中に 1，2，3 の数字が書かれたカードが 1 枚ずつ，合計で 3 枚入っている。また，箱の外に 1 が書かれたカードを 2 枚，2 が書かれたカードを 1 枚用意しておく。いま，箱の中からカードを 1 枚取り出し，外にあるカード 1 枚と交換して箱に戻すという試行を考える。ただし，交換は以下のルールで行う。

- 取り出されたカードが 1 の場合は，交換せずに箱に戻す。
- それ以外の場合は，取り出したカードに書かれている数より 1 小さい数の書かれているカードと交換し，箱に戻す。

第 k 回目の試行の後に，箱の中のカードに書かれてある数字が，1，m，n (ただし $1\leqq m\leqq n\leqq 3$ とする) となる確率を $p_{1,\ m,\ n}(k)$ と書く。ただし，k は自然数とする。

(1)　$p_{1,\ 1,\ 2}(k)$ および $p_{1,\ 1,\ 3}(k)$ を k を用いて表せ。

(2)　$0<q<1$ に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}$ および $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}k^2q^{k-1}$ を q を用いて表せ。ただし $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2q^n=0$ であることは用いてよい。

(3)　箱の中のカードに書かれてある数字が，第 k 回目の試行の後で初めてすべて 1 となる確率を r_k とする。このとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}kr_k$ を求めよ。

9 [2011 大阪大]

a，b，c を正の定数とし，x の関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。以下，定数はすべて実数とする。

(1)　定数 p，q に対し，次を満たす定数 r が存在することを示せ。

$$x\geqq 1\quad ならば\quad |px+q|\leqq rx$$

(2)　恒等式 $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$ を用いて，次を満たす定数 k，l が存在することを示せ。

$$x\geqq 1\quad ならば\quad |\sqrt[3]{f(x)}-x-k|\leqq\frac{l}{x}$$

(3)　すべての自然数 n に対して，$\sqrt[3]{f(n)}$ が自然数であるとする。このとき，関数 $f(x)$ は，自然数の定数 m を用いて $f(x)=(x+m)^3$ と表されることを示せ。

10 [2004 京都大]

n を 2 以上の自然数とする．x^{2n} を $x^2-x+\dfrac{n-1}{n^2}$ で割った余りを a_nx+b_n とする．すなわち，x の多項式 $P_n(x)$ があって

$$x^{2n}=P_n(x)\left(x^2-x+\frac{n-1}{n^2}\right)+a_nx+b_n$$

が成り立っているとする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ．