

$\boxed{1}$［2015 東北大］

$-1<x<1$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ で，次の 2 つの条件を満たすものを考える。

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right) \quad (-1<x<1,\ -1<y<1)$$

$f(x)$ は $x=0$ で微分可能で，そこでの微分係数は 1 である

(1) $-1<x<1$ に対し $f(x)=-f(-x)$ が成り立つことを示せ。

(2) $f(x)$ は $-1<x<1$ の範囲で微分可能であることを示し，導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3) $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{2}$［2017 早稲田大］

定数 c は $-1<c<1$ を満たすとする。すべての実数 x に対して，関係式

$$f(x)+f(cx)=x^2$$

を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

$\boxed{3}$［2015 滋賀医科大］

a を $0<a<\frac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，方程式

$$x(1-\cos x)=\sin(x+a)$$

を考える。

(1) n を正の整数とするとき，上の方程式は $2n\pi<x<2n\pi+\frac{\pi}{2}$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。

(2) (1) の解を x_n とおく。極限 $\lim_{n\to\infty}(x_n-2n\pi)$ を求めよ。

(3) 極限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(x_n-2n\pi)$ を求めよ。ただし，$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いてよい。

$\boxed{4}$［2017 早稲田大］

n を正の整数とする。試行の結果に応じて k 点 ($k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$) が与えられるゲームがある。ここで k 点を獲得する確率は，ある $t>0$ によって決まっており，これを $p_k(t)$ とする。このとき，確率 $p_k(t)$ は $a\geqq0$ に対して次の関係式を満足するという。

$$p_0(t)=t^n,\ p_k(t)=a\cdot\frac{n-k+1}{k}\cdot p_{k-1}(t)\ (k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

(1) $\sum_{k=0}^{n}p_k(t)$ の値を求めよ。

(2) a を t を用いて表せ。

(3) 各 k に対して，$0\leqq t\leqq1$ の範囲で $p_k(t)$ を最大にするような t の値 T_k を求めよ。ただし，$p_k(0)=0$ ($k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n-1$)，$p_n(0)=1$ と定める。

(4) $0<t<1$ なる t を与えたとき，(3) で求めた T_k に対して，

$$E=\sum_{k=0}^{n}T_k\cdot p_k(t)$$

とする。E の値を求めよ。

$\boxed{5}$［2015 九州大］

C_1，C_2 をそれぞれ次の式で与えられる放物線の一部分とする。

$C_1:y=-x^2+2x,\ 0\leqq x\leqq2$

$C_2:y=-x^2-2x,\ -2\leqq x\leqq0$

また，a を実数とし，直線 $y=a(x+4)$ を ℓ とする。

(1) 直線 ℓ と C_1 が異なる 2 つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ。

以下，a が (1) の条件を満たすとする。このとき，ℓ と C_1 で囲まれた領域の面積を S_1，x 軸と C_2 で囲まれた領域で ℓ の下側にある部分の面積を S_2 とする。

(2) S_1 を a を用いて表せ。

(3) $S_1=S_2$ を満たす実数 a が $0<a<\frac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ。

$\boxed{6}$［2015 早稲田大］

関数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) $t>0$ を媒介変数として，$x=f'(t)$，$y=f(t)-tf'(t)$ で表される曲線の概形をかけ。

(3) (2) の曲線の接線が x 軸と y 軸によって切り取られてできる線分の長さは一定であることを示せ。

$\boxed{7}$［2015 京都大］

1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において，P を辺 AB の中点とし，点 Q が辺 AC 上を動くとする。このとき，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値を求めよ。

$\boxed{8}$［2015 千葉大］

関数 $f(x)=|x+2\sin(x+a)+b|$ の $0\leqq x\leqq2\pi$ での最大値と最小値の差は，定数 a，b によらず常に π 以上で，かつ $\left(\frac{4}{3}\pi+2\sqrt{3}\right)$ 以下であることを示せ。

$\boxed{9}$［2014 京都大］

実数の定数 a，b に対して，関数 $f(x)$ を $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+x+1}$ で定める。すべての実数 x で不等式 $f(x)\leqq f(x)^3-2f(x)^2+2$ が成り立つような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。

$\boxed{10}$［2014 東北大］

(1) n を自然数，a を正の定数として，

$$f(x)=(n+1)\{\log(a+x)-\log(n+1)\}-n(\log a-\log n)-\log x$$

とおく。$x>0$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

(2) n が 2 以上の自然数のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}>(n+1)^{\frac{1}{n}}$$