$\boxed{1}$［2013 早稲田大］

a，b を正の定数とする。

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}|a\sin x+b\cos x|\,dx$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\int_{\frac{2(k-1)\pi}{n}}^{\frac{2k\pi}{n}}\left(\log\frac{k}{n}\right)|a\sin nx+b\cos nx|\,dx$ を求めよ。

$\boxed{2}$［2015 東北大］

n を自然数とし，$\displaystyle I_n=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+x^n}}$，$\displaystyle J_n=\int_0^1\log\left(\sqrt{1+x^n}+1\right)dx$ とおく。ただし，対数は自然対数とする。

(1) 実数 $t\geqq 0$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\log\frac{\sqrt{1+t}+1}{2}\leqq\frac{t}{2\left(\sqrt{1+t}+1\right)}$$

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0\leqq J_n-\log 2\leqq\frac{1}{4(n+1)}$$

(3) 導関数 $\displaystyle\frac{d}{dx}\log\left(\sqrt{1+x^n}+1\right)$ を求めよ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n(1-I_n)$ を求めよ。

$\boxed{3}$［2015 東北大］

$a>0$ を実数とする。$n=1$，2，3，…… に対し，座標平面の 3 点 $(2n\pi,\ 0)$，$\left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \dfrac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\right)$，$((2n+1)\pi,\ 0)$ を頂点とする三角形の面積を A_n とし，

$\displaystyle B_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}dx$，$\displaystyle C_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}dx$ とおく。

(1) $n=1$，2，3，…… に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}$ を求めよ。

$\boxed{4}$［2015 京都府立医科大］

n を 1 以上の整数とし $\displaystyle f_n(x)=\frac{1}{(2-x)^n}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2+x)^n}$ $(|x|<2)$ とおく。これについて $\displaystyle I_1=\int_0^1 f_1(x)dx$，$\displaystyle I_n=\int_0^1(1-x)^{n-1}f_n(x)dx$ $(n\geqq 2)$ とおく。

(1) $f_n(x)$ の導関数 $f_n{}'(x)$ を $f_{n+1}(x)$ を用いて表せ。

(2) n が奇数のとき $\displaystyle I_n=\frac{1}{2^{n-1}n}+I_{n+1}$，$n$ が偶数のとき $I_n=I_{n+1}$ であることを証明せよ。

(3) $\displaystyle 0\leqq I_n\leqq\frac{2}{n}$ であることを証明せよ。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{k-1}(2k-1)}=\log 3$ であることを証明せよ。

$\boxed{5}$［2010 東北大］

xy 平面において，連立不等式

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2\leqq 1\\ 0\leqq x\leqq 1\\ y\geqq 0\end{cases}$$

の表す領域を A とする。これを座標空間内で z 軸の方向に 1 だけ平行移動するときに A が通過してできる立体を B とする。B を x 軸の周りに，y 軸から z 軸の方向に 90° 回転させたときに通過してできる立体を C とする。C の体積を求めよ。

$\boxed{6}$［2017 慶応義塾大］

$f(x)$ を閉区間 $[0,\ 1]$ で定義された連続な増加関数とし，n を正の整数とする。また，I_n，J_n を

$$I_n=\int_0^1 f(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx$$

$$J_n=\int_0^1 f(x)|\sin((2n+1)\pi x)|\,dx$$

で定める。

(1) x についての方程式 $\sin((2n+1)\pi x)=0$ の実数解で区間 $[0,\ 1]$ に属するものは ア $\boxed{}$ 個ある。それらを小さい順に x_0，x_1，x_2，……，x_N $\left(N=\text{ア}\boxed{}-1\right)$ と並べると，$x_k=$ イ $\boxed{}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \dots\dots,\ N)$ である。

次に，$k=0$，1，2，……，ア $\boxed{}-2$ に対して，a_k を

$\displaystyle a_k=\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx$ で定める。このとき，次の (F1)，(F2) が成り立つ。

(F1) k が偶数のとき $\displaystyle f(x_k)\frac{2}{(2n+1)\pi}\leqq a_k\leqq f(x_{k+1})\frac{2}{(2n+1)\pi}$

(F2) k が奇数のとき $\displaystyle -f(x_{k+1})\frac{2}{(2n+1)\pi}\leqq a_k\leqq -f(x_k)\frac{2}{(2n+1)\pi}$

(2) (F1) が成り立つことを証明せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$ が成り立つことを証明せよ。必要であれば，(F1)，(F2) を証明なしに用いてよい。

(4) 数列 $\{J_n\}$ の極限は関数 $f(x)$ の定積分を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty}J_n=$ ウ $\boxed{}$ と表すことができる。

$\boxed{7}$［2017 名古屋大］

不等式 $0<a<1$ を満たす定数 a に対して，曲線 $C: y=a-1-\log x$ $(x>0)$ を考える。s を正の実数とし，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ a-1-\log s)$ における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ $(u(s),\ 0)$，$(0,\ v(s))$ とする。必要があれば，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$ を証明なしで使ってよい。

(1) 関数 $u(s)$，$v(s)$ を s の式で表せ。

(2) 関数 $t=u(s)$，$t=v(s)$ の 2 つのグラフを，増減・凹凸および交点の座標に注意して，同じ st 平面上に図示せよ。

(3) 関数 $t=u(s)$，$t=v(s)$ の 2 つのグラフで囲まれた図形を t 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{8}$［2017 大阪大］

xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸の周りに 1 回転してできる回転体を L とおく。回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく。

(1) t を $0\leqq t\leqq 2$ を満たす実数とする。xy 平面上の点 $(0,\ t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする。$t=(2\cos\theta)^2$ $\left(\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いて表せ。

(2) M の体積 V を求めよ。

$\boxed{9}$［2013 京都大］

xy 平面内で，y 軸上の点 P を中心とする円 C が 2 つの曲線

$$C_1: y=\sqrt{3}\log(1+x),\quad C_2: y=\sqrt{3}\log(1-x)$$

とそれぞれ点 A，点 B で接しているとする。さらに $\triangle$PAB は A と B が y 軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする。このとき 3 つの曲線 C，C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。ただし，2 つの曲線がある点で接するとは，その点を共有し，さらにその点において共通の接線をもつことである。

$\boxed{10}$［2012 東京工業大］

xyz 空間に 4 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{A}(0,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(\sqrt{3},\ -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{3},\ -1,\ 0)$ をとる。四面体 PABC の $x^2+y^2\geqq 1$ を満たす部分の体積を求めよ。