$\boxed{1}$［2017 早稲田大］

3つの複素数 α，β，z は次の関係式

$$\alpha+\beta=z,\ \alpha\beta=i\overline{z},\ \alpha\beta\neq 0$$

を満たしているとする。ただし，i は虚数単位，$\overline{z}$ は z の共役な複素数とする。このとき $\dfrac{\alpha}{\beta}$ が実数であるような z の条件を求め，そのような z の集合を複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{2}$［2000 東京大］

複素数平面上の原点以外の相異なる2点 $\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$ を考える．$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$ を通る直線を l，原点から l に引いた垂線と l の交点を $\mathrm{R}(w)$ とする．ただし，複素数 γ が表す点Cを $\mathrm{C}(\gamma)$ と書く．このとき，次のことを示せ．

「$w=\alpha\beta$ であるための必要十分条件は，$\mathrm{P}(\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta)$ が中心 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円周上にあることである．」

$\boxed{3}$［2017 東京工業大］

実数 a，b，c に対して $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$，$f(x)=x^2+cx+1$ とおく。また，複素数平面内の単位円周から2点 1，-1 を除いたものを T とする。

(1) $f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ。

(2) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるならば，$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ を満たす実数 c_1，c_2 が存在することを示せ。

(3) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を a，b を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

$\boxed{4}$［2017 東京大］

複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w=\dfrac{1}{z}$ とする。

(1) α を0でない複素数とし，点 α と原点Oを結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から1点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1の3乗根のうち，虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{5}$［2014 東京大］

Oを原点とする複素数平面上で6を表す点をA，$7+7i$ を表す点をBとする。正の実数 t に対し，$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ を表す点Pをとる。

(1) $\angle\mathrm{APB}$ を求めよ。

(2) 線分OPの長さが最大になる t の値を求めよ。

$\boxed{6}$［2014 東京医科歯科大］

(1) 複素数 $z=x+yi$（x，y は実数）を，$z+\dfrac{1}{z}$ が実数となるように動かすとき，x^2y+4y^3 の最大値を求めよ。

(2) 座標平面上の各点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して，複素数 $z=\left(x+y-\dfrac{1}{2}\right)+(x-y)i$ を考える。このとき，$z^2+\dfrac{1}{z^2}$ が実数となるような点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ。

$\boxed{7}$［2014 東京大］

複素数平面上の点 a_1，a_2，……，a_n，…… を $a_1=1$，$a_2=i$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ により定め，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とおく。

(1) 3点 b_1，b_2，b_3 を通る円 C の中心と半径を求めよ。

(2) すべての点 b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は円 C の周上にあることを示せ。

$\boxed{8}$［2000 東京工業大］

(1) 複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ が $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ を満たすための必要十分条件を r と θ を用いて表せ．

(2) n を自然数とするとき，$|1+z+\cdots\cdots+z^n|^2$ を r，θ，n を用いて表せ．

(3) 複素数 z が $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ を満たすならば，すべての自然数 n に対し，$|1+z+\cdots\cdots+z^n|<1$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{9}$［2001 京都大］

p を2以上の整数とする．2以上の整数 n に対し，次の条件(a)，(b)を満たす複素数の組 $(z_1,\ z_2,\ \cdots\cdots,\ z_n)$ の個数を a_n とする．

(a) $k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ に対し，$z_k{}^p=1$ かつ，$z_k\neq 1$

(b) $z_1z_2\cdots\cdots z_n=1$

(1) a_3 を求めよ．

(2) a_{n+2} を a_n，a_{n+1} の一方または両方を用いて表せ．

(3) a_n を求めよ．

$\boxed{10}$［2017 東京大］

k を実数とし，座標平面上で次の2つの放物線 C，D の共通接線について考える。

$$C:y=x^2+k$$
$$D:x=y^2+k$$

(1) 直線 $y=ax+b$ が共通接線であるとき，a を用いて k と b を表せ。ただし $a\neq -1$ とする。

(2) 傾きが2の共通接線が存在するように k の値を定める。このとき，共通接線が3本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ。

$\boxed{11}$［2017 京都大］

w を0でない複素数，x，y を $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ を満たす実数とする。

(1) 実数 R は $R>1$ を満たす定数とする。w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。

(2) 実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。w が偏角 α の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。

$\boxed{12}$［2015 東京大］

正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える。

$$C:\quad y=ax^2+\frac{1-4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ。

$\boxed{13}$［2015 早稲田大］

座標平面において楕円 $E:\dfrac{x^2}{a}+y^2=1$ を考える。ただし，a は $a>0$ を満たす定数とする。楕円 E 上の点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ を中心とする円 C が，次の2つの条件を満たしているとする。

(i) 楕円 E は円 C とその内部に含まれ，E と C は2点P，Qで接する。

(ii) $\triangle\mathrm{APQ}$ は正三角形である。

このとき，a の値を求めよ。

$\boxed{14}$［2008 東京工業大］

平面の原点Oを端点とし，x 軸となす角がそれぞれ $-\alpha$，α $\left(ただし\ 0<\alpha<\frac{\pi}{3}\right)$ である半直線を L_1，L_2 とする。L_1 上に点P，L_2 上に点Qを線分PQの長さが1となるようにとり，点Rを，直線PQに対し原点Oの反対側に△PQRが正三角形になるようにとる。

(1)　線分PQが x 軸と直交するとき，点Rの座標を求めよ。

(2)　2点P，Qが，線分PQの長さを1に保ったまま L_1，L_2 上を動くとき，点Rの軌跡はある楕円の一部であることを示せ。

$\boxed{15}$［2002 東京工業大］

楕円 $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から引いた2本の接線が直交するような点Pの軌跡を求めよ.

$\boxed{16}$［2000 東京大］

AB＝AC，BC＝2の直角二等辺三角形ABCの各辺に接し，ひとつの軸が辺BCに平行な楕円の面積の最大値を求めよ.