$\boxed{1}$ [2011 東京大]

座標平面上の 1 点 $P\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $Q(\alpha,\ \alpha^2)$，$R(\beta,\ \beta^2)$ を，3 点 P，Q，R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQR の重心 $G(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。

$\boxed{2}$ [2017 東京工業大]

n は正の整数とし，文字 a，b，c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする。A_n の要素に対し次の条件 (＊) を考える。

(＊)　文字 c が 2 つ以上連続して現れない。

以下 A_n から要素を 1 つ選ぶとき，どの要素も同じ確率で選ばれるとする。

(1)　A_n から要素を 1 つ選ぶとき，それが条件 (＊) を満たす確率 $P(n)$ を求めよ。

(2)　$n \geqq 12$ とする。A_n から要素を 1 つ選んだところ，これは条件 (＊) を満たし，その 7 番目の文字は c であった。このとき，この要素の 10 番目の文字が c である確率を $Q(n)$ とする。極限値 $\lim_{n\to\infty} Q(n)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ [2004 慶応義塾大]

実数の閉区間 $[0,\ 1]=\{x \mid 0 \leqq x \leqq 1\}$ を定義域および値域とする関数

$$f(x)=\begin{cases} 2x+\dfrac{1}{2} & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{4} \text{ のとき}\right) \\ -2x+\dfrac{3}{2} & \left(\dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{3}{4} \text{ のとき}\right) \\ 2x-\dfrac{3}{2} & \left(\dfrac{3}{4} \leqq x \leqq 1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

を考える．この関数の 2 回の合成を $f_2(x)=f(f(x))$，また 3 回の合成を $f_3(x)=f(f_2(x))=f(f(f(x)))$ とする．

(1)　x が閉区間 $[0,\ 1]$ を動くとき，$y=f_2(x)$ および $y=f_3(x)$ のグラフの概形をかけ．

更に 4 以上の自然数 n に対して，関数 $f(x)$ の n 回の合成を $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$ とする．また $f_1(x)=f(x)$ とおく．いま閉区間 $[0,\ 1]$ 内の点 c を 1 つ決め，順に値 $f_1(c)$，$f_2(c)$，$f_3(c)$，…… を見ていく．このとき $f_1(c)=c$ であれば c を周期 1 の点とよぶ．c が周期 1 の点ではなく，かつ $m \geqq 2$ として m 回の合成でその値が初めて c になるとき，つまり条件

$$f_j(c) \neq c\ (j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m-1) \quad \text{かつ} \quad f_m(c)=c$$

が満たされるとき，c を周期 m の点とよぶ．

(2)　閉区間 $[0,\ 1]$ 内の周期 1 の点の個数を求めよ．また周期 2 の点の個数を求めよ．

(3)　m を 3 以上の奇数としたとき，周期 m の点の個数を求めよ．

$\boxed{4}$ [2017 早稲田大]

平面全体に縦横同じ間隔で電球が置かれていて，次の規則で点滅を繰り返すとする。

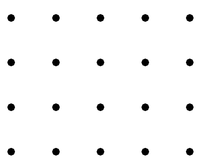
　初めはすべての電球が消えている。

　ある 1 個の電球が 1 秒後に点灯し，2 秒後にその周りに隣接する 8 個の電球が点灯する。

　3 秒後には，さらにその外側に隣接する電球が点灯する。一般に $n+1$ 秒後には，n 秒目に初めて点灯した電球の外側に隣接する電球が点灯する。

　1 度点灯した電球は「2 秒間点灯して次の 1 秒間消灯」を繰り返す。

次の図は電球の配置の一部分を示している。



$n \geqq 1$ とする。n 秒後に初めて点灯する電球の個数を a_n とし，n 秒後に点灯している電球の個数を b_n として，次の問いに答えよ。

(1)　a_n を n を用いた式で表せ。

(2)　b_n を n を用いた式で表せ。

(3)　極限値 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{n^2}$ を求めよ。

$\boxed{5}$ [2015 東京工業大]

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定める。また数列 $\{b_n\}$ を $b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots\cdots+na_n}{1+2+\cdots\cdots+n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ と定める。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　すべての n に対して，不等式 $b_n \leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3)　極限値 $\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

$\boxed{6}$ [2014 東京大]

a を自然数 (すなわち 1 以上の整数) の定数とする。

白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作 (＊) を考える。

(＊)　袋 U から球を 1 個取り出し，

　(A)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

　(B)　取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作 (＊) を繰り返し行う。

たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。

(3)　$\lim_{m\to\infty} \dfrac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} p_n$ を求めよ。

$\boxed{7}$ [2013 東京工業大]

正の整数 n に対し，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の区間の長さの総和を S_n とする。このとき，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

$\boxed{8}$ [2013 慶応義塾大]

z を複素数とする。自然数 n に対して z^n の実部と虚部をそれぞれ x_n と y_n として，2 つの数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を考える。つまり，$z^n=x_n+iy_n$ を満たしている。ここで，i は虚数単位である。

(1)　複素数 z が，実数 θ を用いて $z=\cos\theta+i\sin\theta$ の形で与えられたとき，任意の自然数 n に対して $x_n=\cos(n\theta)$ と $y_n=\sin(n\theta)$ が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(2)　複素数 z が，正の実数 r と実数 θ を用いて $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ の形で与えられたとする。このとき，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ がともに 0 に収束するための必要十分条件を，r と θ の範囲で表すと，ア $\boxed{}$ となる。ア $\boxed{}$ が数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ がともに 0 に収束するための十分条件であること，および必要条件であることの証明もせよ。

(3)　$z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{10}$ のとき，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ と $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ はともに収束し，それぞれの和は $\sum_{n=1}^{\infty} x_n=$ イ $\boxed{}$，$\sum_{n=1}^{\infty} y_n=$ ウ $\boxed{}$ である。

$\boxed{9}$ [2013 九州大]

α を $0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とし，数列 $\{\theta_n\}$ を次式により定める。

$$\theta_1=0,\quad \theta_{n+1}=\begin{cases} \theta_n+\alpha & \left(\theta_n \leqq \dfrac{\pi}{2} \text{ のとき}\right) \\ \theta_n-\alpha & \left(\theta_n > \dfrac{\pi}{2} \text{ のとき}\right) \end{cases} \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

さらに数列 $\{x_n\}$ を次式により定める。

$$x_1=0,\quad x_{n+1}=x_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sin\theta_{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　x_3 が最大となる α を求めよ。

(2)　$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} x_n$ を求めよ。

(3)　極限値 $\lim_{n\to\infty} x_n$ が最大となる α と，その極限値を求めよ。

$\boxed{10}$［2010 東京工業大］

放物線 $y=x^2$ 上の右から原点に近づく点列 $\mathrm{A}_n(a_n,\ a_n{}^2)\,(n=1,\ 2,\ \cdots)$ と，x 軸上の右から原点に近づく点列 $\mathrm{B}_n(b_n,\ 0)\,(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ があって，$\triangle \mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n-1}$ はすべての $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対し正三角形を成しており，$a_1=1$ であるとき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 \quad \text{および} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^3$$

を求めよ。

$\boxed{11}$［2010 東京工業大］

a，b，t は実数で，$a \geqq 0 > b$ とする。次の漸化式により，数列 a_n，b_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を定める。

$$a_1=a,\ b_1=b$$
$$a_{n+1}=\left(\frac{t}{2}+\frac{5}{t^2+1}\right)a_n+\left(\frac{t}{2}-\frac{5}{t^2+1}\right)b_n$$
$$b_{n+1}=\left(\frac{t}{2}-\frac{5}{t^2+1}\right)a_n+\left(\frac{t}{2}+\frac{5}{t^2+1}\right)b_n$$

(1)　a_n を a，b，t，n を用いて表せ。

(2)　$n \to \infty$ とするとき，a_n が収束するための a，b，t についての必要十分条件を求めよ。

$\boxed{12}$［2008 東京医科歯科大］

t は $0<t<\pi$ を満たす実数とする。

(1)　次の等式を証明せよ。

$$\left(\cos\frac{t}{2}\right)\left(\cos\frac{t}{4}\right)\left(\cos\frac{t}{8}\right)=\frac{\sin t}{8\sin\dfrac{t}{8}}$$

(2)　次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を t を用いて表せ。

$$a_1=\cos\frac{t}{2},\ \ a_n=a_{n-1}\left(\cos\frac{t}{2^n}\right)\quad (n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(3)　数列 $\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を次のように定義する。

$$b_1=\sqrt{\frac{1}{2}},\ \ b_n=\sqrt{\frac{1+b_{n-1}}{2}}\quad (n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$
$$c_1=\sqrt{\frac{1}{2}},\ \ c_n=c_{n-1}b_n\quad (n=2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

このとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ。

$\boxed{13}$［2003 早稲田大］

座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円周上に点 P(0，1)，Q(1，0) をとり，点 P_1，P_2，…… および点 R_1，R_2，…… を次のように定める．$\mathrm{P}=\mathrm{P}_1$ とし，P_n が与えられたとき，弧 $\overset{\frown}{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}}$ の中点を P_{n+1} とする．また，$\mathrm{P}=\mathrm{R}_1$ とし，R_n が与えられたとき，R_n から半径 OP_{n+1} へ下ろした垂線の足を R_{n+1} とする．

$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して，$a_n=\mathrm{R}_n\mathrm{R}_{n+1}$ と定める．このとき，以下の等式および不等式を示せ．

(1)　$a_n=\dfrac{1}{2^n\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

(2)　$\dfrac{1}{3}a_n<a_{n+1}<\dfrac{1}{2}a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$

(3)　R_1，R_2，……，R_n，R_{n+1} を順次結んで得られる折れ線の長さ $L_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{4}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}<\lim_{n\to\infty} L_n<\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

を満たす．

$\boxed{14}$［1999 東京工業大］

複素平面上の点列 A_n $(n\geqq 0)$ が複素数列 a_n+ib_n （a_n，b_n は実数，i は虚数単位）を表すとする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=a_\infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=b_\infty$ がともに存在するとき，

複素数 $a_\infty+i\,b_\infty$ を表す点 A_∞ を A_n の極限点ということにする．このとき，次の問いに答えよ．

(1)　複素平面上の点列 P_n $(n\geqq 0)$ を次のように定める．

P_0 は 0 を表す点とし，P_1 は $1+i$ を表す点とする．

以下 $n\geqq 2$ に対しては，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}}$ を反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転し，長さを $\dfrac{2}{3}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$ となるように P_n を定める．

P_n の極限点 P_∞ が表す複素数を求めよ．

(2)　点列 Q_n $(n\geqq 0)$ は次のように定める．

Q_0 は 0 を表す点とし，Q_1 は $z=x+iy$ を表す点とする．

以下 $n\geqq 2$ に対しては，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-2}\mathrm{Q}_{n-1}}$ を反時計回りに $\dfrac{\pi}{6}$ 回転し，長さを $\dfrac{1}{2}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n}$ となるように Q_n を定める．

Q_n の極限点 Q_∞ と (1) の P_∞ が一致するとき，z を求めよ．

$\boxed{15}$［2007 東京大］

n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 O，P_0，P_1，……，P_n があり，次の 2 つの条件を満たしている。

(A)　$\angle \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{OP}_k=\dfrac{\pi}{n}$ $(1\leqq k\leqq n)$，$\angle \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k=\angle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1$ $(2\leqq k\leqq n)$

(B)　線分 OP_0 の長さは 1，線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さを a_k とし，$s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。

$\boxed{16}$［2008 東京工業大］

実数 x に対し，x 以上の最小の整数を $f(x)$ とする。a，b を正の実数とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^c\left\{\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right\}$ が収束するような実数 c の最大値と，そのときの極限値を求めよ。