1 [2015 東京工業大]

xy 平面上を運動する点 P の時刻 $t\,(t>0)$ における座標 $(x,\ y)$ が

$$x=t^2\cos t,\ \ y=t^2\sin t$$

で表されている。原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ のなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\lim\limits_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ。

(2)　$\vec{v}$ が y 軸に平行になるような $t\,(t>0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする。このとき，不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ。

2 [2014 東京大]

p，q は実数の定数で，$0<p<1$，$q>0$ を満たすとする。関数

$$f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える。次の問いに答えよ。必要であれば，不等式 $1+x\leqq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい。

(1)　$0<x<1$ のとき，$0<f(x)<1$ であることを示せ。

(2)　x_0 は $0<x_0<1$ を満たす実数とする。数列 $\{x_n\}$ の各項 $x_n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を，$x_n=f(x_{n-1})$ によって順次定める。$p>q$ であるとき，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ となることを示せ。

(3)　$p<q$ であるとき，$c=f(c)$，$0<c<1$ を満たす実数 c が存在することを示せ。

3 [2014 東京工業大]

$a>1$ とし，次の不等式を考える。

$$\frac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{a}}\ \cdots\cdots(*)$$

(1)　$a=2$ のとき，すべての $t>0$ に対して不等式 $(*)$ が成り立つことを示せ。

(2)　すべての $t>0$ に対して不等式 $(*)$ が成り立つような a の範囲を求めよ。

4 [2013 東京大]

a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\ \ g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つもつような a をすべて求めよ。

5 [2013 東京工業大]

k を定数とするとき，方程式 $e^x-x^e=k$ の異なる正の解の個数を求めよ。

6 [2012 東京工業大]

3 次関数 $y=x^3-3x^2+2x$ のグラフを C，直線 $y=ax$ を ℓ とする。

(1)　C と ℓ が原点以外の共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2)　a が (1) で求めた範囲内にあるとき，C と ℓ によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ が最小となる a の値を求めよ。

7 [2012 東京大]

次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える。

$$x^2+(y-1)^2\leqq1,\ \ x\geqq\frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 ℓ は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする。その線分の長さ L の最大値を求めよ。また，L が最大値をとるとき，x 軸と ℓ のなす角 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ。

8 [2009 東京大]

(1)　実数 x が $-1<x<1$，$x\neq0$ を満たすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2)　次の不等式を示せ。

$$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$$

9 [2008 東京大]

放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 P，Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。

(1)　線分 PQ の長さ L と傾き m で，h を表せ。

(2)　L を固定したとき，h がとりうる値の最小値を求めよ。

10 [2007 早稲田大]

n を正の整数とする。

(1)　k を正の整数とする。関数 $(1-x)^n x^k$ の $0\leqq x\leqq1$ における最大値を a_n とするとき，a_n および $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(2)　$f(x)$，$g(x)$ を $0\leqq x\leqq1$ において定められた連続関数とする。関数 $(1-x)^n f(x)$，$(1-x)^n g(x)$，$(1-x)^n\{f(x)+g(x)\}$ の $0\leqq x\leqq1$ における最大値をそれぞれ b_n，c_n，d_n とする。このとき 0，b_n+c_n，d_n の大小を判定せよ。

(3)　$p\,(\geqq0)$，$q\,(\geqq0)$，$r\,(\geqq0)$ を定数，$f(x)=px^2+qx+r$ とし，関数 $(1-x)^n f(x)$ の $0\leqq x\leqq1$ における最大値を e_n とする。このとき，$\lim\limits_{n\to\infty}e_n$ を求めよ。

11 [2007 京都大]

すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0)=0$，$f'(0)=1$ を満たし，更に任意の実数 a，b に対して $1+f(a)f(b)\neq0$ であって

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$$

を満たしている。

(1)　任意の実数 a に対して，$-1<f(a)<1$ であることを証明せよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸であることを証明せよ。

12 [2006 東京工業大]

平面上を半径 1 の 3 個の円板が下記の条件 (a) と (b) を満たしながら動くとき，これら 3 個の円板の和集合の面積 S の最大値を求めよ。

(a)　3 個の円板の中心はいずれも定点 P を中心とする半径 1 の円周上にある。

(b)　3 個の円板すべてが共有する点は P のみである。

13 [2006 早稲田大]

(1)　$0<a<1$ とする。このとき $x>0$ で定義された関数 $f(x)=(1+a^x)^{\frac{1}{x}}$ は単調な関数（増加関数または減少関数）であることを示せ。

(2)　次の 4 つの数の中から最小の数を選べ。

$$(2005^{17}+2006^{17})^{\frac{1}{17}},\ (2005^{18}+2006^{18})^{\frac{1}{18}}$$

$$\left(2005^{\frac{1}{17}}+2006^{\frac{1}{17}}\right)^{17},\ \left(2005^{\frac{1}{18}}+2006^{\frac{1}{18}}\right)^{18}$$

(3)　n は 1 より大きい整数，p_1，p_2，$\cdots\cdots$，p_n はすべて正の数とし，$0<\alpha<\beta$ とする。

このとき，$(p_1{}^{\alpha}+p_2{}^{\alpha}+\ \cdots\cdots\ +p_n{}^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$ と $(p_1{}^{\beta}+p_2{}^{\beta}+\ \cdots\cdots\ +p_n{}^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}$ の大小を判定せよ。

14 [2005 東京大]

$x>0$ に対し $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とする。

(1)　$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対し $f(x)$ の第 n 次導関数は，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を用いて

$$f^{(n)}(x)=\frac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$$

と表されることを示し，a_n，b_n に関する漸化式を求めよ。

(2)　$h_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおく。h_n を用いて a_n，b_n の一般項を求めよ。

15 [2005 東京大]

関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{2}x\{1+e^{-2(x-1)}\}$ とする。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$x>\dfrac{1}{2}$ ならば $0\leqq f'(x)<\dfrac{1}{2}$ であることを示せ。

(2)　x_0 を正の数とするとき，数列 $\{x_n\}\ (n=0,\ 1,\ \cdots\cdots)$ を，$x_{n+1}=f(x_n)$ によって定める。$x_0>\dfrac{1}{2}$ であれば，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ であることを示せ。