$\boxed{1}$［2017 京都大］

$a \geqq 0$ とする。$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ の範囲で曲線 $y=xe^{-x}$，直線 $y=ax$，直線 $x=\sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。このとき，$S(a)$ の最小値を求めよ。
(ここで「囲まれた部分」とは，上の曲線または直線のうち2つ以上で囲まれた部分を意味するものとする。)

$\boxed{2}$［2017 東京医科歯科大］

連続関数 $f(x)$ と定数 a が次の関係式を満たしているとする。

$$\int_0^x f(t)dt = 4ax^3+(1-3a)x+\int_0^x\left\{\int_0^u f(t)dt\right\}du+\int_x^1\left\{\int_u^1 f(t)dt\right\}du$$

(1)　a と $f(0)+f(1)$ の値を求めよ。
(2)　$g(x)=e^{-2x}f(x)$ とおくとき，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。ここで e は自然対数の底を表す。
(3)　$f(x)$ を求めよ。

$\boxed{3}$［2017 東京大］

点 O を原点とする座標空間内で，1辺の長さが1の正三角形 OPQ を動かす。また，点 A(1，0，0) に対して，∠AOP を θ とおく。ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。
(1)　点 Q が (0，0，1) にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。
(2)　点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

$\boxed{4}$［2015 東京大］

n を正の整数とする。
(1)　関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} & (|x|\leqq 1 \text{ のとき})\\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき})\end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|x| \leqq \dfrac{1}{n}$ を満たす x に対して $p \leqq f(x) \leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。

$$p \leqq n\int_{-1}^1 g(nx)f(x)dx \leqq q$$

(2)　関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|x|\leqq 1 \text{ のとき})\\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき})\end{cases}$$

このとき，次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^1 h(nx)\log(1+e^{x+1})dx$$

$\boxed{5}$［2015 東京工業大］

$a>0$ とする。曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸の周りに1回転してできる回転体を A とする。
(1)　A の体積 V を求めよ。
(2)　点 $(t,\ 0)$ $(-a \leqq t \leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式

$$S(t) \leqq \int_{-a}^a e^{-(s^2+t^2)}ds$$

を示せ。
(3)　不等式

$$\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^a e^{-x^2}dx$$

を示せ。

$\boxed{6}$［2014 東京工業大］

点 $\mathrm{P}(t,\ s)$ が $s=\sqrt{2}t^2-2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに，点 P を原点を中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする。さらに，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする。
(1)　点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標を，t を用いて表せ。
(2)　直線 $y=a$ と曲線 C がただ1つの共有点をもつような定数 a の値を求めよ。
(3)　図形 D を y 軸の周りに1回転して得られる回転体の体積 V を求めよ。

$\boxed{7}$［2013 東京大］

座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$ により定まる正方形 S の4つの頂点を A(−1，1，0)，B(1，1，0)，C(1，−1，0)，D(−1，−1，0) とする。正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。
(1)　$0 \leqq t < 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。
(2)　V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。

$\boxed{8}$［2012 東京工業大］

n を正の整数とする。数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1=\frac{1}{n(n+1)},\quad a_{k+1}=-\frac{1}{k+n+1}+\frac{n}{k}\sum_{i=1}^k a_i \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

によって定める。
(1)　a_2 および a_3 を求めよ。
(2)　一般項 a_k を求めよ。
(3)　$b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n=\log 2$ を示せ。

$\boxed{9}$［2011 東京医科歯科大］

自然数 n に対し

$$S_n=\int_0^1 \frac{1-(-x)^n}{1+x}dx,\quad T_n=\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)}$$

とおく。
(1)　次の不等式を示せ。

$$\left|S_n-\int_0^1 \frac{1}{1+x}dx\right| \leqq \frac{1}{n+1}$$

(2)　T_n-2S_n を n を用いて表せ。
(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n$ を求めよ。

$\boxed{10}$［2010 東京大］

(1)　すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx < \frac{1}{2k}$$

(2)　$m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn}$$

$\boxed{11}$［2010 京都大］

座標空間内で，O(0，0，0)，A(1，0，0)，B(1，1，0)，C(0，1，0)，D(0，0，1)，E(1，0，1)，F(1，1，1)，G(0，1，1) を頂点にもつ立方体を考える。この立方体を対角線 OF を軸にして回転させて得られる回転体の体積を求めよ。

$\boxed{12}$［2010 東京工業大］

xyz 空間内の3つの部分集合

$$A=\{(x,\ y,\ z) \mid |x|\leqq 1,\ y^2+z^2\leqq 1\}$$
$$B=\{(x,\ y,\ z) \mid |y|\leqq 1,\ x^2+z^2\leqq 1\}$$
$$C=\{(x,\ y,\ z) \mid |z|\leqq 1,\ x^2+y^2\leqq 1\}$$

の和集合 $A\cup B\cup C$ の体積を求めよ。

$\boxed{13}$［2009 東京大］

a を正の実数とし，空間内の 2 つの円板

$$D_1=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ z=a\},$$

$$D_2=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ z=-a\}$$

を考える。D_1 を y 軸の周りに 180° 回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分を x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。E の体積を $V(a)$ とし，E と $\{(x,\ y,\ z)\mid x\geqq 0\}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする。

(1)　$W(a)$ を求めよ。

(2)　$\lim\limits_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ。

$\boxed{14}$［2007 東京工業大］

(1)　整数 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ と正の数 a_n に対して

$$f_n(x)=a_n(x-n)(n+1-x)$$

とおく。2 つの曲線 $y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ が接するような a_n を求めよ。

(2)　$f_n(x)$ は (1) で定めたものとする。$y=f_0(x)$，$y=e^{-x}$ と y 軸で囲まれる図形の面積を S_0，$n\geqq 1$ に対し $y=f_{n-1}(x)$，$y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ で囲まれる図形の面積を S_n とおく。このとき，$\lim\limits_{n\to\infty}(S_0+S_1+\cdots\cdots+S_n)$ を求めよ。

$\boxed{15}$［2007 東京大］

(1)　$0<x<a$ を満たす実数 x，a に対し，次を示せ。

$$\frac{2x}{a}<\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}\,dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$$

(2)　(1) を利用して，$0.68<\log 2<0.71$ を示せ。ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数を表す。