

1 00インディ･ジョーンズの冒険を模した物理系[2000 東京理科大]

次の問題の □ の中に入れるべき正しい答えを，解答群から選べ(必要なら同一番号をくり返し用いてよい)。

図1は，カプセルPに乗り込み，秘境の奥にある洞穴に隠された秘宝を手に入れようとするインディ・ジョーンズ(以下 IJ と略す)の冒険を模した物理系である。a を一定の長さを表す定数とする。水平面Aから傾き45°の斜面がなめらかにつながり，高さ $3a$ まで続く。水平面と斜面はなめらかである。斜面の頂上Bから水平に対岸までの距離 $10a$ の湖があり，対岸Cには小舟bが停泊している。Cから茂みが距離 $5a$ 続き，その端から洞穴DEがなめらかにつながる。洞穴は半径 a の円筒の $\frac{1}{4}$ 部分からなり，内面はなめらかである。洞穴の上部EFは平らな堅い岩で，E点に秘宝Tが置かれている。秘宝の質量は無視できるものとする。

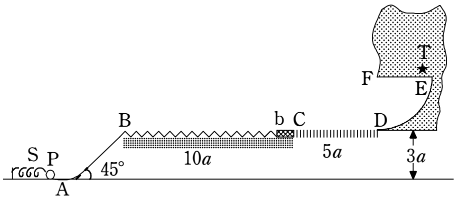


図1

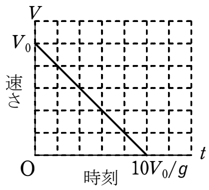


図2

g を重力加速度の大きさとするとき，Cから洞穴に向かう茂みに関しては次のことが分かっている。茂みの上を初速 V_0 でカプセルと同じ物体をすべらせ，時刻 t における速さ V を測ると，初速 V_0 の大きさのいかんにかかわらず，図2の結果が得られた。また，カプセルと同じ物体を茂みに垂直に落下させても全くはね返らなかった。全ての運動は図1の鉛直な平面内で起こり，空気抵抗は無視できる。

(a) IJは小さなカプセルPに乗り，平面Aに置かれた質量が無視できるつる巻きばねSを利用して斜面をすべり上がり，湖を飛び越えようと考えた。IJが乗った小さなカプセル全体を質量 m の質点とし，つる巻きばねのばね定数を $\frac{100mg}{a}$ とする。ばねを自然長から $\boxed{\text{ア}}\times a$ だけ縮め，カプセルを打ち出すと，カプセルは湖を飛び越えてCに着地した。着地後カプセルは弾むことなく茂みをすべりぬけ，洞穴の端D点に達した。D点におけるカプセルの速さは $\boxed{\text{イ}}\times\sqrt{ga}$ であった。

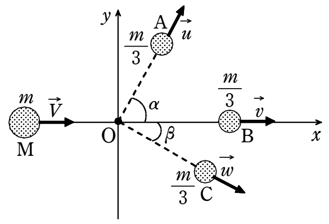
(b) D点に達したカプセルは洞穴をすべり上がる。D点でカプセルが洞穴の円筒面を垂直に押す力を F_D とすると，カプセルがE点に達するためには，$F_D \geqq \boxed{\text{ウ}}\times mg$ である必要がある。IJの乗ったカプセルはこの条件を満足したので，カプセルはE点に達し，IJは秘宝を手に入れることができた。

(c) カプセルは洞穴の上面EFに弾性衝突したあと，円筒面をすべり降り，再び茂みをすべりぬけて湖岸Cに達した。このときカプセルのもつ運動エネルギーは，カプセルが往路のC点でもっていた運動エネルギーより $\boxed{\text{エ}}\times mga$ だけ少ない。カプセルは湖岸Cに停泊していた質量 $4m$ の小舟にすべり乗り，小舟の中で直ちに静止した。小舟が動き出す瞬間は水の抵抗がないものとすると，対岸Bに向かって動き出す小舟の速さは乗り移る前のカプセルの速さの $\boxed{\text{オ}}$ 倍である。

[(ア)，(イ)，(ウ)，(エ)，(オ)の解答群]

(1) 1	(2) 2	(3) 3	(4) 4	(5) 5	(6) 6
(7) 7	(8) 8	(9) 9	(10) 10	(11) $\frac{1}{2}$	(12) $\frac{1}{3}$
(13) $\frac{2}{3}$	(14) $\frac{1}{4}$	(15) $\frac{3}{4}$	(16) $\frac{1}{5}$	(17) $\frac{2}{5}$	(18) $\frac{3}{5}$
(19) $\frac{4}{5}$	(20) $\frac{1}{6}$	(21) $\frac{5}{6}$	(22) $\frac{1}{7}$	(23) $\frac{2}{7}$	(24) $\frac{3}{7}$
(25) $\frac{4}{7}$	(26) $\frac{5}{7}$	(27) $\frac{6}{7}$	(28) $\frac{1}{8}$	(29) $\frac{3}{8}$	(30) $\frac{5}{8}$
(31) $\frac{7}{8}$	(32) $\frac{1}{9}$	(33) $\frac{2}{9}$	(34) $\frac{4}{9}$	(35) $\frac{5}{9}$	(36) $\frac{7}{9}$
(37) $\frac{8}{9}$	(38) $\frac{2}{25}$	(39) $\sqrt{2}$	(40) $\sqrt{3}$	(41) $\sqrt{5}$	(42) $\sqrt{6}$
(43) $\frac{1}{\sqrt{2}}$	(44) $\frac{1}{\sqrt{3}}$	(45) $\frac{2}{\sqrt{3}}$	(46) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	(47) その他	

2 16物体の分裂[2016 千葉大]



図のように，x 軸の正の向きに速度 $\vec{V}$ で進んできた質量 m の物体Mが，内部にある少量の火薬の爆発によって，点Oで質量 $\frac{m}{3}$ の3つの物体A，B，Cに分裂した。その後，物体A，B，Cは x-y 平面内を進んだ。物体Bは初めの進行方向と同じ向きに進み，物体A，Cは図のように x 軸の正の向きとなす角度 α，β の向きにそれぞれ進んだ。分裂直後の物体A，B，Cの速度はそれぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ であった。物体M，A，B，Cの速さをそれぞれ V，u，v，w とし，次の問いに答えよ。

(1) 物体Mの速度 $\vec{V}$ を物体A，B，Cの速度 $\vec{u}$，$\vec{v}$，$\vec{w}$ を用いて表せ。
(2) 速さ u を w，α，β を用いて表せ。
(3) 角度 α が 60°，β が 30° の場合について，速さ u と w の比 $\frac{u}{w}$ を求めよ。
(4) 角度 α と β が等しくなる場合について，速さ v を，V，u，α を用いて表せ。

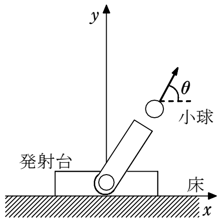
分裂前の物体Mのもつ運動エネルギーは E であった。x-y 平面内を運動する物体A，B，Cの全運動エネルギーには，火薬の爆発によって新たに $2E$ の運動エネルギーが加わったとする。$\alpha=\beta$ となる場合を考え，次の問いに答えよ。

(5) 物体Mのもっていた運動エネルギー E を，m，u，v を用いて表せ。

ここで，$\alpha=\beta=60°$ となる場合を考える。

(6) 速さ u，v，w を，それぞれ，V を用いて表せ。
(7) 物体A，B，Cの運動エネルギー E_A，E_B，E_C を，E を用いて表せ。

3 08発射台から発射された小球の運動[2008 筑波大]



図のように，水平な床に置かれた発射台を考える。この発射台は，一定のエネルギー E_0 を瞬時に小球と発射台の運動エネルギーに変換することで小球を発射できる。この小球は大きさが無視でき，質量 m をもつ。小球を含まない発射台の質量を M とする。床と発射台の間には摩擦がなく，発射台は床の上の直線上を自由に動くことができる。この直線を x 軸とし，x 軸に垂直で鉛直上向きを y 軸とする。この小球の発射方向は x-y 面内で動かすことができる。小球は床の高さから発射されるとしてよい。重力加速度は鉛直下向きでその大きさを g とする。また，空気抵抗，小球発射前後での E_0 にかかわる質量変化はないものとする。

以下，$x=0$ の位置で静止している発射台から小球を発射する場合を考える。発射直後の小球の床に対する速度は，図のように x 軸と角 $\theta\left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ をなす向きであった。

(1) 小球発射直後の小球と発射台の床に対する速さをそれぞれ v_1，V_1 とするとき，小球発射前後でのエネルギー保存，水平方向の運動量保存を表す式を示せ。
(2) 発射直後の小球の床に対する速度の水平(x)成分 v_{1x}，垂直(y)成分 v_{1y} を m，M，E_0，θ を用いて表せ。
(3) 発射直後の小球の発射台に対する相対速度の大きさを m，M，E_0，θ を用いて表せ。
(4) 発射された小球が床に最初に落ちる位置 x_F を g，m，M，E_0，θ を用いて表せ。
(5) x_F が最大となるときの角度 θ は $\frac{\pi}{4}$ より大きいか小さいかを理由とともに示せ。

4 16物体と斜面との衝突［2016 中央大］

次の文章の空欄に当てはまる数式を記せ。

図1および図2のように原点Oをとり，位置Aから x 軸の正の向きで角度45°上向きの方向に，一定の速さ v で質量 m のボールを打ち出す。ボールはその後，原点を通る傾き45°の斜面上の位置Bでぶつかり，ボールが鉛直上向きにはね上がった場合を考える。ボールと斜面が，図1のように完全弾性衝突する場合と，図2のように非弾性衝突する場合で，初期位置Aの座標を比較してみよう。ボールの大きさおよびボールの空気抵抗を無視し，ボールと斜面の反発係数を e とする。重力加速度の大きさは g とする。必要があれば，三角関数の公式 $\tan(c\pm d)=\dfrac{\tan c\pm\tan d}{1\mp\tan c\tan d}$ (複号同順) を利用せよ。

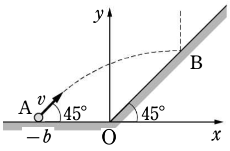


図1

まず図1のように，初期位置A $(-b,\ 0)$ からボールを打ち出し，斜面上の位置B $(x_B,\ y_B)$ でボールと斜面が完全弾性衝突する場合を考える。位置Bの y 座標 y_B は，v，g を用いて $y_B=$ ア と表せる。ボールを打ち出してから位置Bに到達するまでの経過時間 t は v，g を用いて $t=$ イ である。よって，b は v，g を用いて $b=$ ウ と表すことができる。ボールが位置Bで鉛直上向きにはね上がってから，最高点に到達するまでの時間 s は，v，g を用いて エ と表され，最高点の y 座標は v，g を用いて オ であることがわかる。このことは力学的エネルギー保存則からも確認することができる。以上より，位置Aから位置Bに到達するまでのボールの軌跡は，v，g，x_B，y_B を用いて放物線 $y=$ カ $\times(x-x_B)^2+y_B$ で表される。

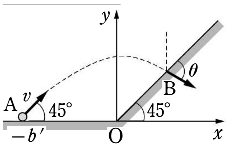


図2

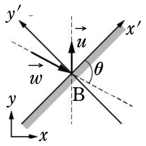
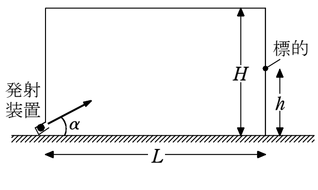


図3

次にボールが斜面と反発係数 e で非弾性衝突する場合を考える。この場合は，図2のように，初期位置A $(-b',\ 0)$ からボールを打ち出し，ボールは頂点を通過してから位置B $(x_B',\ y_B')$ で衝突する。図3のように，ボールが位置Bで斜面と衝突する直前の速度を $\vec{w}$ (速さ $w=|\vec{w}|$)，衝突直後の速度を $\vec{u}$ (速さ $u=|\vec{u}|$) として考えてみよう。斜面に平行上向きを x' 軸，斜面に垂直上向きを y' 軸とし，ボールの速度 $\vec{w}$ と x' 軸のなす角を θ とする。ボールの速度 $\vec{w}$ と速度 $\vec{u}$ の y' 成分の関係は w，u，e，θ を使って $w\sin\theta=u\times$ キ となる。衝突の直前直後でボールの速度の x' 成分は変化しないことを利用すると，θ と e の関係は $\tan\theta=$ ク と表すことができる。ボールの描く放物線の頂点から位置Bに到達するまでの経過時間 T を使うと，位置Bで斜面と衝突する直前のボールの速度 $\vec{w}$ の y 成分は $-gT$ と書ける。ボールの速度 $\vec{w}$ と x 軸のなす角が $\theta-45°$ であることに注意すると，経過時間 T は v，e，g を用いて $T=$ ケ となる。よって，衝突位置Bの y 座標 y_B' は v，e，g を用いて $y_B'=$ コ と表すことができる。ボールが位置Aから位置Bへ到達する時間を利用すると b' が求まり，v，e，g を用いて $b'=$ サ であることがわかる。以上より，初期位置Aおよび衝突位置Bは任意の位置ではなく打ち出しの速さ v および反発係数 e によって決定されており，反発係数 e に応じて初期位置Aを調整する必要があることがわかる。

5 13くり返し衝突［2013 千葉大］

図のように，高さ H の直方体の箱を水平になるよう固定し，その側面最下部に，小球をさまざまな速さで一定の向きに発射する装置を取りつける。発射装置から距離 L だけ離れた箱の反対側の側面には，高さ h の位置に標的が設置されている。小球の運動は紙面内に限るものとして，小球の発射時の速さにより小球が標的に命中するかどうかを考えたい。



小球の大きさは無視してよく，箱の内面はなめらかで，箱の内部で空気抵抗は無視できるものとする。また，発射装置の仰角 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\dfrac{h}{L}<\tan\alpha\leqq\dfrac{H}{L}$ を満たす範囲に設定されているものとし，小球の質量を m，小球の発射時の速さを v，重力加速度の大きさを g として，次の問いに答えよ。

(1) 小球が発射されてから，初めて標的側の側面に達するまでの時間を，m，L，α，v，g のうち必要な記号を用いて表せ。

(2) 小球が標的側の側面に達する前に箱の下面に衝突する場合を考えよう。

(a) 小球が発射されてから，初めて箱の下面に衝突するまでの時間を，m，H，α，v，g のうち必要な記号を用いて表せ。

(b) 小球が発射されてから，標的側の側面に達するまでに箱の下面に一度以上衝突するような v の範囲，およびその場合の標的側の側面に達するまでの時間 t の範囲を，m，H，L，α，g のうち必要な記号を用いて不等号で表せ。なお，標的に命中するかどうかは考慮しなくてよい。

(3) 小球が箱の下面と衝突することなく標的側の側面に到達する場合を考えよう。

(a) 小球の発射時の速さ v が小さいとき，小球は標的と同じ高さ h に達することがない。小球の最高点が高さ h 以上になるような v の範囲を，m，h，H，L，α，g のうち必要な記号を用いて不等号で表せ。

(b) 小球を $v=v_1$ で発射したとき，ちょうど標的に命中した。このときの発射時の速さ v_1，およびその小球が発射されてから標的に命中するまでの時間 t_1 を，m，h，H，L，α，g のうち必要な記号を用いて表せ。

(4) 発射された小球が，箱の内面との衝突をくり返した後に標的に命中する場合を考えよう。ただし，小球と箱の内面との間の反発係数を，箱のいずれの内面においても e とし $(0<e<1)$，箱の角や発射装置との衝突はないものとする。なお，等比級数の和について次の式を用いてよい。

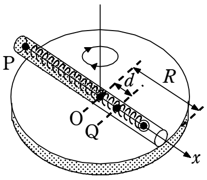
$$1+b+b^2+\cdots+b^N=\frac{b^{N+1}-1}{b-1}\quad(\text{ただし}\quad b\neq 1)$$

(a) 速さ v で発射された小球が，標的側の側面に一度衝突した後，箱の上面に衝突した。上面に衝突した直後の小球の速度の鉛直成分の大きさを求め，m，h，H，L，α，e，v，g のうち必要な記号を用いて表せ。

(b) 速さ v で発射された小球が，箱の側面と $2n$ 回 (標的側と発射装置側それぞれ n 回) 衝突した後に標的に命中したとする。発射してから標的に命中するまでの時間を，m，h，H，L，α，e，v，g，n のうち必要な記号を用いて表せ。なお，箱の上面または下面に何度衝突していてもよい。

6 12ばねにつながれた小球の円運動［2012 千葉大］

図のように，中心 O のまわりを矢印の向きに水平面内で回転できる半径 R の薄い円板があり，その面上に中心 O を原点とする x 軸を定義する。細い円筒を x 軸にそって円板に固定し，質量 m の小球をばね定数 k のばねの一端に取りつけ，ばねとともに円筒内に入れた。ばねの他端は，円板の外の，x 軸上負の点 P で円筒に固定した。小球は初めに金具により固定されていて，金具が外れたあとは x 軸上に限定された運動を行う。小球と円筒との間には，$x \geqq 0$ ではなめらかで摩擦はないが，$x<0$ では静止摩擦係数 μ，動摩擦係数 μ' の摩擦力がはたらく。金具が外れ，円板と小球がともに静止した状態では，小球は $x=d$ の点 Q にあった。ただし，d は正の値とする。次の問いに答えよ。重力加速度の大きさを g とし，また，ばねと円筒との間には摩擦は無く，ばねの質量や空気抵抗は無視できるものとする。



(1) $x=d$ を除く $-R<x<R$ のどの位置に小球を固定しても，円板が静止した状態で静かに金具を外すと小球が必ずすべり出した。そのために μ が満たすべき範囲は $0 \leqq \mu < \mu_0$ と書ける。μ_0 を，m，k，g，d を用いて表せ。

(2) 小球を $x=x_0$ の位置 $(0<x_0<R)$ で固定し，円板を一定の角速度 ω で回転させながら静かに金具を外したところ，小球はその位置のまま等速円運動を行った。ただし，$k>m\omega^2$ とする。

(a) 小球にかかる遠心力と，小球がばねから受ける力を，x 軸の向きを正として，k，m，d，x_0，ω を用いて表せ。

(b) 金具を外す前の小球の固定位置が範囲 $0<x \leqq s$ にある場合，角速度 $\omega\ (>0)$ をどのような値にしても，静かに金具を外した後，小球が等速円運動しない。そのような s を k，m，d のうちから必要な記号を用いて表せ。また，小球が等速円運動しない理由を 40 字程度で説明せよ。

(c) 小球が円板上で等速円運動するためには，ω は $0<\omega<\omega_1$ を満たさなければならない。ω_1 を，k，m，d，R を用いて表せ。

以下では，$-R<x<0$ で小球を固定し，円板を一定の角速度 ω で回転させながら静かに金具を外すことにする。ただし，$k<m\omega^2$ とする。

(3) 摩擦が無視できる場合，すなわち $\mu=\mu'=0$ の場合を考えよう。小球が $x=-r$ $(x<0)$ で半径 r の等速円運動を行う場合の円板の角速度を ω_2 とする。

(a) ω_2 を，k，m，d，r を用いて表せ。ただし，$\omega_2>0$ とする。

(b) 円板の角速度を ω_2 から変えずに，小球の位置を r に比べて小さい量 Δx だけずらし，$x=-r+\Delta x$ とした場合，小球にかかる遠心力とばねから受ける力の和を，x 軸の向きを正として，k，d，r，Δx を用いて表せ。

(c) 小球を $x=-r+\Delta x$ で固定し，円板を角速度 ω_2 で回転させながら金具を静かに外す。その直後の小球の運動はどうなるか。選択肢 ①～③ から正しいものを 1 つ選べ。ただし，$\Delta x>0$ とする。

① 正の向きに移動する　② その場に留まる　③ 負の向きに移動する

(4) $\mu>0$ の場合を考える。$-R<x<0$ の位置 $x=x_1$ で小球を固定し，円板を一定の角速度 ω で回転させながら静かに金具を外すと，小球はそのまま半径 $|x_1|$ の等速円運動を行った。角速度 ω のとりうる範囲を，m，k，d，$|x_1|$，μ，g を用いて表せ。ただし，μ は，(1) の μ_0 を用いて $\mu<\mu_0$ を満たし，また，$\omega>0$ とする。

(5) (4) で $x_1=-d$ とし，円板を一定の角速度で回転させながら静かに金具を外すと，小球は半径 d の等速円運動を行った。その後，ある瞬間に円板を停止させた。円板が停止した後の小球の運動において，初めて点 O を通過するときの速さを v_0，また，点 P から最も離れたときの位置を x' とする。v_0 と x' を，m，k，d，μ'，g を用いて表せ。ただし，$0<\mu'<\mu_0$ とし，また，d は十分に小さいため $x'<R$ が満たされるとする。

7 16円錐振り子［2016 上智大］

軽い糸の先に質量 m の小さなおもりをつけて以下の実験を行った。重力加速度の大きさを g とする

(1) 図 1 のように，長さ l の糸が鉛直方向からの角度 α を保つようにおもりを水平面内で回転させた。このとき，おもりの加速度の大きさは $\boxed{\text{ア}}\times g$ であり，糸の張力の大きさは $\boxed{\text{イ}}\times mg$ である。角度 α を大きくし，90° に近づけて行くと，糸の張力の大きさは $\boxed{\text{ウ}}$。

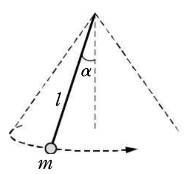


図 1

(2) 図 2 のように，軸が鉛直で頂点に小さな穴が開いた半頂角 α のなめらかな円錐面がある。穴を通した長い糸の一端を手で持ち，頂点からおもりまでの糸の長さを l に保ったまま，おもりを円錐面上で角速度 ω の等速円運動をさせた。なお，穴における摩擦は無視できるものとする。このとき，おもりが円錐面から受ける垂直抗力の大きさは $\boxed{\text{エ}}\times mg$ であり，糸の張力の大きさは $\boxed{\text{オ}}\times mg$ である。これから，おもりが円錐面から離れないで運動する条件は，$l\omega^2 \leqq \boxed{\text{カ}}\times g$ であることがわかる。

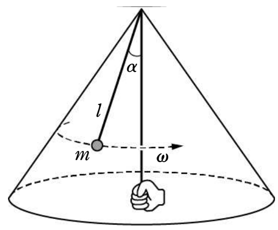


図 2

$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{カ}}$ の選択肢

① 1　② 2　③ $\dfrac{1}{2}$　④ $\sin\alpha$　⑤ $\cos\alpha$

⑥ $\tan\alpha$　⑦ $\dfrac{1}{\sin\alpha}$　⑧ $\dfrac{1}{\cos\alpha}$　⑨ $\dfrac{1}{\tan\alpha}$　⑩ $\sin^2\alpha$

⑪ $\cos^2\alpha$　⑫ $\tan^2\alpha$

$\boxed{\text{ウ}}$ の選択肢

① 限りなく増加していく　② 一定の値に向かって増加していく

③ 変化せず一定の値を保つ　④ 0 でない一定の値に向かって減少していく

⑤ 0 に向かって減少していく　⑥ 振動する

$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の選択肢

① $\sin\alpha+\dfrac{l\omega^2}{g}\sin^2\alpha$　② $\cos\alpha+\dfrac{l\omega^2}{g}\sin^2\alpha$　③ $\tan\alpha+\dfrac{l\omega^2}{g}\sin^2\alpha$

④ $\sin\alpha-\dfrac{l\omega^2}{g}\sin^2\alpha$　⑤ $\cos\alpha-\dfrac{l\omega^2}{g}\sin^2\alpha$　⑥ $\tan\alpha-\dfrac{l\omega^2}{g}\sin^2\alpha$

⑦ $\sin\alpha+\dfrac{l\omega^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$　⑧ $\cos\alpha+\dfrac{l\omega^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$

⑨ $\tan\alpha+\dfrac{l\omega^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$　⑩ $\sin\alpha-\dfrac{l\omega^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$

⑪ $\cos\alpha-\dfrac{l\omega^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$　⑫ $\tan\alpha-\dfrac{l\omega^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$

$\boxed{8}$ 16鉛直面内の円運動［2016 千葉大］

図1のような途中がループしているレールがある。レールの太さは無視できるものとし，ループBCDEは鉛直面をなす半径 r の円軌道になっている。点Aから初速0で出発した質量 m の小球Pの運動を考える。点Aの水平面GBからの高さを h として，次の(1)～(9)に答えよ。ただし，重力加速度の大きさを g とし，摩擦や空気の抵抗は無視できるものとする。

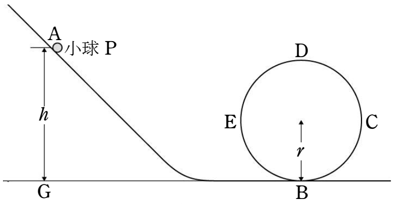


図1

(1) 最初に点Bを通過するときの小球Pの速さ v_B を g，h を用いて表せ。

その後，小球Pはレールにそって点C，D，Eを通過して運動し，再び，点Bに到達した。次の(2)～(4)について，m，g，h，r のうち必要な記号を用いて答えよ。

(2) ループの最高点Dにおける小球Pの速さ v_D を求めよ。

(3) 点Dにおいて，小球Pがレールから受ける垂直抗力の大きさ N_D を求めよ。

(4) 小球Pがレールから離れずにループを1周するための h の最小値 h_1 を求めよ。

次に $h<h_1$ の場合の小球Pの運動を考える。そのとき，図2のように小球Pは点Fにおいて，レールから離れ，放物運動を行ったとする。そのとき，FOCのなす角を θ とする $(0°<\theta<90°)$。小球Pがレールから離れた後はレールとは衝突せず，そのまま放物運動を続けるものとする。次の(5)～(7)について，g，r，θ のうち必要な記号を用いて答えよ。

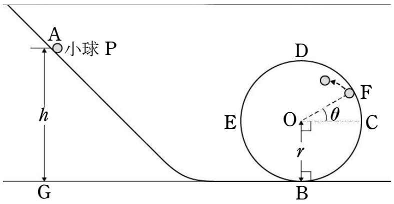


図2

(5) 小球Pが点Cに到達するための h の最小値 h_2 を求めよ。

(6) レールから離れる点Fにおける小球Pの速さ v_F を求めよ。

(7) このとき，点Aの高さは $h=h_F$ であった。高さ h_F を求めよ。ただし，$h_1>h_F>h_2$ である。

図2において，$\theta=30°$ であった。小球Pが点Fを離れた瞬間を時刻 $t=0$ とし，その後の時刻 t における小球Pの運動について考える。次の(8)～(9)について，g，r，t のうち必要な記号を用いて答えよ。

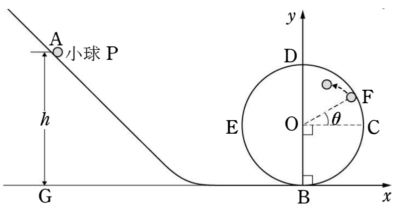


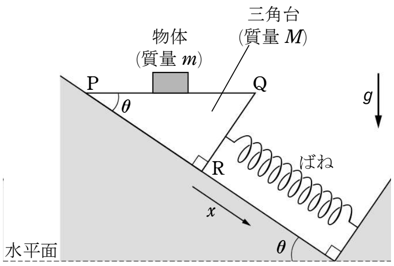
図3

(8) 図3のように点Bを原点とし，水平方向を x 軸(図3の右向きを正とする)，鉛直方向を y 軸(図3の上向きを正とする)とする。小球Pが点Fを離れた後の時刻 t における小球Pの x 座標と y 座標を求めよ。

(9) $t=T$ において $x=0$ となった。このときの時刻 T と小球Pの y 座標を求めよ。

$\boxed{9}$ 16斜面上での単振動［2016 名古屋大］

図に示すように，水平面より角度 θ だけ傾いた斜面がある。その斜面上に質量 M の三角台 $(\angle QPR=\theta)$ が辺PRを斜面に接して置かれており，三角台の辺QRは斜面の下端にある斜面に垂直な壁とばね定数 k のばねでつながれている。また，辺PQ上の中点には大きさが無視できる質量 m の物体が置かれている。ばねは斜面に対して平行で，フックの法則に従うものとし，三角台と斜面の間には摩擦がないものとする。



最初，物体および三角台は，三角台に作用する力がつりあう位置で静止している。このとき，ばねは自然の長さより d だけ縮んでいる。このつりあいの状態における点Rの位置を原点として，斜面と平行に x 軸をとり，右下向きを正とする。また，三角台は十分に大きく，物体は三角台上で運動するものとする。ただし，空気による抵抗はなく，重力加速度の大きさを g とする。次の問いに答えよ。

(1) d を g，k，m，M，θ を用いて表せ。

まず，物体と三角台の間には摩擦がないものとする。三角台が斜面にそって加速度 α で運動する場合を考えよう。図の状態からばねが自然の長さとなる位置 $(x=-d)$ まで物体および三角台をもどし，そこで静かに手をはなす。次の問いに答えよ。

(2) 以下の文章が正しい記述になるように，$\boxed{\quad}$ を埋めよ。$\boxed{\text{ア}}$ は d，g，k，M，N，x，θ，$\boxed{\text{イ}}$ は g，m，α，θ，$\boxed{\text{ウ}}$ は k，m，M，x，θ，$\boxed{\text{エ}}$ は g，k，m，M，x，θ を用いて表せ。

三角台の斜面方向の運動方程式は，三角台が物体から受ける垂直抗力の大きさを N とすると，

$M\alpha=\boxed{\text{ア}}$ ……(a)

となる。一方，三角台とともに移動する観測者から見た，物体にはたらく垂直方向の力のつりあいより，垂直抗力の大きさは，

$N=\boxed{\text{イ}}$ ……(b)

と表される。(b)式を(a)式に代入し，(1)の結果を使うと，加速度は，

$\alpha=\boxed{\text{ウ}}$ ……(c)

と求まる。(c)式の結果を(b)式に代入すると，垂直抗力の大きさは $N=\boxed{\text{エ}}$ と求まる。

(3) 以下の文章が正しい記述になるように，$\boxed{\quad}$ を埋めよ。$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ には問題文の後ろにある選択肢①～④から適切なものを選んで，記号を書け。また，$\boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ に入る数式を d，k，m，M，θ から必要なものを用いて表せ。

三角台は，x 軸方向の単振動を行う。その周期は $\boxed{\text{オ}}$，振幅は $\boxed{\text{カ}}$ となる。このとき物体に作用する $\boxed{\text{キ}}$ 方向の力は0である。したがって，物体は三角台の単振動と同じ周期で $\boxed{\text{ク}}$ 方向の単振動を行う。また，その振幅は(カ)×$\boxed{\text{ケ}}$ となる。

$\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ の選択肢

① 水平　② 鉛直　③ 斜面に平行な　④ 斜面に垂直な

次に，図において質量 M の三角台を，同じ質量で三角台と物体の間に摩擦があるものに取りかえた。ただし，三角台と斜面の間には摩擦がないものとする。図の状態からばねが自然の長さとなる位置 $(x=-d)$ まで物体および三角台をもどし，そこで静かに手をはなすと，静止摩擦力により物体と三角台が一体となって動きだした。三角台と物体の間の静止摩擦係数を μ_0 と表す。次の問いに答えよ。

(4) 物体に作用する静止摩擦力を F とする。ただし，水平方向にそって右向きを F の正の向きとする。位置 x における F を g，k，m，M，x，θ，μ_0 のうち必要なものを用いて表せ。

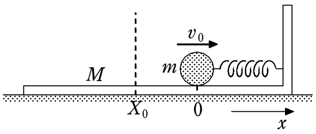
(5) 物体と三角台との間の最大摩擦力を F_0 とする。位置 x における F_0 の大きさを g，k，m，M，x，θ，μ_0 のうち必要なものを用いて表せ。

(6) 以下の文章が正しい記述になるように，$\boxed{\text{コ}}$～$\boxed{\text{シ}}$ に入る数式を g，k，m，M，θ，μ_0 のうち必要なものを用いて表せ。

物体と三角台が一体となって動き続けるために必要な，静止摩擦係数の最小値を求めてみよう。物体と三角台が互いにすべらないためには，運動中のあらゆる位置で静止摩擦力の大きさ $|F|$ が最大摩擦力 F_0 を下回っていなければならない。$F_0-|F|$ が最も小さくなるとき，静止摩擦力は $\boxed{\text{コ}}$，最大摩擦力は $\boxed{\text{サ}}$ と表される。これより，物体と三角台が互いにすべらないための静止摩擦係数の最小値は $\boxed{\text{シ}}$ と求まる。

10 16台上での単振動［2016 筑波大］

図のように，水平でなめらかな床の上に質量 M の台が置かれている。質量 m の大きさの無視できる小球を台の右端とばね定数 k のばねで連結し，ばねが自然の長さとなるように台の上に静かに置いた。物体の位置は床に固定された座標で表し，水平方向に x 軸をとり，右向きを正とする。このときの小球の位置は 0，台の重心の位置は X_0 であった。時刻 $t=0$ において，小球のみに右向きの速さ v_0 を与えた。時刻 $t>0$ における台および小球の運動は，2 物体の重心の運動と台に対する小球の運動に分解して考えることができる。台および小球はそれぞれ x軸方向に運動し，台と床，および，台と小球の間には摩擦ははたらかないとする。ばねの質量は無視でき，また，台の上面は十分に広く運動の最中に小球が台から落ちることはないとする。このとき，次の問いに答えよ。(6) を除き，床の上に静止した観測者の立場で考える。



(1) 小球と台からなる 2 物体が静止しているときの重心の位置を求めよ。

(2) 時刻 $t>0$ における，小球と台からなる 2 物体の重心の位置を求めよ。

(3) ばねが最も縮んだときの小球の速さを求めよ。

(4) (3) のときのばねの縮み量 d_1 を求めよ。

(5) 時刻 $t>0$ における運動を考える。ばねの長さの自然の長さからの変化量を d (縮んでいるとき：$d>0$，伸びているとき：$d<0$ とする)，台の加速度を A として，台の運動方程式を書け。

(6) (5) の運動を，台とともに動く観測者の立場で考える。

(a) この観測者から見た小球の加速度を a として，小球の運動方程式を書け。ただし，(5) の加速度 A をそのまま用いよ。

(b) 小球が台に対して単振動をすることを示せ。また，その角振動数 ω を求めよ。

(7) 時刻 $t>0$ における台の重心の位置を求めよ。ただし，(4) の d_1 と (6) の ω をそのまま用いてよい。

11 17台車と小球の単振動［2017 横浜国立大］

図 1 のように，レールの上を水平に移動できる質量 M の台車に質量 m の小球が長さ L の軽い糸でつるされており，鉛直下向きに重力がはたらいている。重力加速度の大きさを g とする。糸は伸び縮みせず，また，台車とレールの摩擦は無視できるものとする。台車の重心は支点 S にあるものとする。初めに，台車と小球は静止しており，糸は図 1 のように大きさの無視できる固定されたくぎによりレールを含む鉛直面内で曲げられている。このとき糸は台車の支点 S からくぎまでは鉛直で，くぎから小球までは鉛直に対して角度 δ となっている。支点 S からくぎまでの距離を $\frac{1}{2}L$ とする。

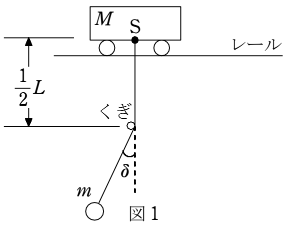


図 1

ア ～ イ は M，m，L，g，δ の中から，ウ ～ キ コ は M，m，L，g，v の中から，ク ケ は M，m，L，g，v，θ の中から必要なものを用いて解答せよ。ただし，v は ア で求めた小球の速さを表すものとする。

(1) 小球を静かにはなすと，小球は右側に動き始め，小球が最下点に達したのち，台車も動きだした。小球が最下点に達した直後の小球の速さは ア ，糸の張力の大きさは イ である。

(2) その後，図 2 のように小球は最下点からさらに右側に振れ，鉛直からの振れ角 θ が最大となった。このときの台車の速さは ウ ，振れ角の余弦 $\cos\theta$ は エ である。

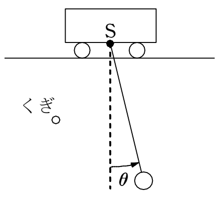


図 2

(3) その後，小球の振れ角は減少し，再び小球が最下点に達した。このときの台車の速さは オ ，小球の速さは カ である。

(4) その後，糸は再びくぎに触れることなく，台車と小球は運動を続けた。このときの台車と小球からなる物体系の重心の水平方向の速さは キ で一定となる。

(5) その後の運動は，小球の鉛直からの振れ角 θ が十分小さいとき，台車と小球からなる物体系の重心からみると，台車と小球が単振動するとみなせる。台車の質量と小球の質量が等しい場合，重心からみた支点 S の水平方向の位置は ク ，重心からみた小球の水平方向の位置は ケ である。ただし，それぞれの水平方向の位置は右向きを正とする。また，θ は反時計回りを正とし，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ と近似できるものとする。この振動の周期は コ と表される。

12 14ケプラーの法則と物体の分裂［2014 広島大］

図 1 のように，質量 m の小物体 X を地球の中心 O から距離 h だけ離れた点 A より OA に垂直な方向へ速さ v_0 で打ち出した。その後，小物体 X は点 O を焦点とするだ円軌道を描き，点 A と点 O を結ぶ直線上で点 O から距離 d ($d>h$) だけ離れた点 B に速さ v_1 で到達した。軌道上で点 B は点 O から最も離れている。地球の質量を M，万有引力定数を G とし，h は地球の半径より大きいものとする。また，地球の大気，自転および公転の影響，地球以外の天体による重力の影響は無視できるものとする。次の問いに答えよ。

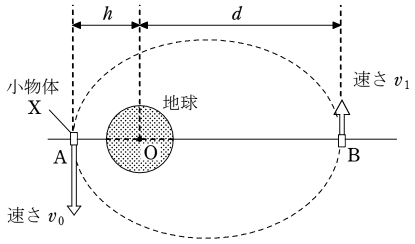


図 1

(1) 小物体 X の点 A における力学的エネルギーと点 B における力学的エネルギーとの間に成りたつ関係式を，m，M，G，h，d，v_0，v_1 を用いて表せ。

(2) 点 A における小物体 X の面積速度は $\frac{1}{2}v_0h$ であり，点 B における小物体 X の面積速度は $\frac{1}{2}v_1d$ である。ケプラーの第二法則を使い，速さ v_0 を，M，G，h，d を用いて表せ。

図 2 のように，小物体 X は点 B に到達した瞬間，質量 $\frac{m}{2}$ の小物体 Y と質量 $\frac{m}{2}$ の小物体 Z に分解した。分解直後の小物体 Y の地球から見た速さは v_2 で，運動の方向はだ円軌道の接線方向であった。一方，分解直後の小物体 Z の速さは 0 であった。小物体 Y は点 O を中心とする半径 d の円軌道を描いて運動し，小物体 Z は線分 OB にそって地球に落下した。小物体 Y と Z の間の万有引力は無視できる。

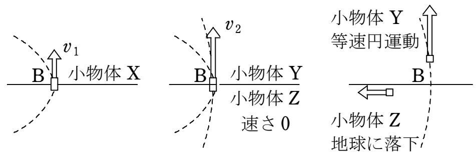


図 2　小物体 X が小物体 Y と小物体 Z に分解

(3) 小物体 Y が等速円運動するとき，速さ v_2 と周期 T を，G，M，d を用いて表せ。

(4) 小物体 X が分解する瞬間の前後で運動量は保存する。この事実を用い，小物体 Y の軌道半径 d と h の比を求めよ。

(5) 小物体 Y の周期 T を概算し，最も近い値を次の解答群の中から選び，記号で答えよ。ただし，近似値として $G \fallingdotseq \frac{20}{3} \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$，$h \fallingdotseq 6.4 \times 10^6\ \mathrm{m}$，$M \fallingdotseq 6.0 \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$ を用いよ。

解答群

① 3 分　② 90 分　③ 1 日　④ 10 日

⑤ 30 日　⑥ 1 年　⑦ 3 年　⑧ 10 年

(6) 小物体 X が点 B において分解せず，そのままだ円軌道を描き運動する場合の周期を T' とする。ケプラーの第三法則を用いて，T' と T の比を求めよ。

13 J05惑星のトンネル[物理重要問題集2017 名古屋大]

図1に示すような，球状の惑星Qの中心Oを通るまっすぐな細い穴を考える。この穴にそってOを原点とする x 軸をとる。図1で穴の下端と上端の x 座標の値は，それぞれ $-R$ と R である。穴の占める体積は惑星Qの体積に比べて無視することができ，惑星Qの質量 M は $\frac{4}{3}\pi\rho R^3$ であるとする。ただし，ρ は惑星Qの密度で一定であり，R は惑星Qの半径である。また，惑星Qには大気がなく自転していないものとする。万有引力定数を G として，次の問いに M を用いずに答えよ。

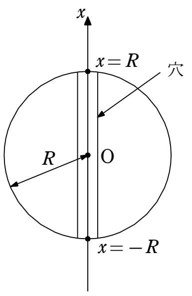


図1

(1) x 軸上の位置 $x \geqq R$ にある質量 m の物体Aにはたらく力 f と，力 f による位置エネルギー U(無限遠方を基準とする)を答えよ。ただし，x 軸の正の向きにはたらく力の符号を正にとれ。

(2) 惑星Qの表面 ($x=R$) から x 軸の正の向きに物体Aを速さ v_0 で発射して，$x=3R$ の位置まで到達させる。このために必要な最小の初速度の大きさ v_0 を求めよ。

(3) 物体Aが穴の中の位置 $x(-R<x<R)$ にある場合に，惑星Qから受ける力 f を考える。Oを中心とする半径 $|x|$ の球面内の質量を M' とすると，力 f は惑星中心Oに集中した質量 M' から物体Aが受ける万有引力に等しい。質量 M' と力 f を求めよ。ただし，f については $0 \leqq x < R$ と $-R<x<0$ の場合に分けて答えよ。

(4) 物体Aにはたらく力 f を x の関数として図2のグラフに表せ。グラフには $x=\pm R$ の位置での f の値も記入せよ。

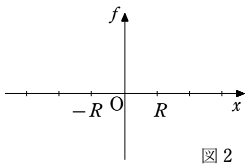


図2

(5) 惑星Qの表面から物体Aを初速度0で穴に落とした場合，物体Aは単振動をする。その理由を述べよ。

(6) (5)の場合に，物体Aが惑星表面から中心Oに最初に達するまでの時間 t_1 と，中心Oにおける速さ v_1 を求めよ。

(7) 物体Aを惑星中心Oから x 軸の正の向きに速さ v_2 で発射し，惑星Qの表面を通りこして $x=3R$ の位置まで到達させる。このために必要な最小の初速度の大きさ v_2 を求めよ。