 Copyrights Makeage,Inc. Allrights Reserved.

$\boxed{1}$ 06斜面上をすべる２物体[2006 名古屋大]

図１のように，斜面 ABC と水平面 DE が CD 間でなめらかにつながっている。水平面に置かれたばねの左端は固定されており，ばねが自然長であるときのばねの右端は，点 E にある。ばねはフックの法則に従い，ばね定数を k とする。また，ばねの質量は無視できるとする。水平面から測った点 C の高さを c，点 B と点 C の高さの差を b，点 A と点 B の高さの差を a とする。また，斜面と水平面のなす角を θ とする。

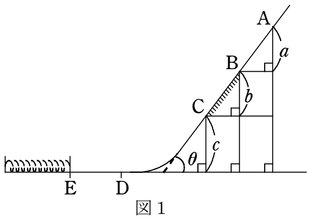


図１

図２のように，ともに質量 m の物体 X と物体 Y をたがいに接するようにして点 A に置き，手で支えておく。物体の大きさはともに無視できるとする。また，物体 X，物体 Y と BC 間の斜面との動摩擦係数を，それぞれ μ_X，μ_Y とする。物体 X，物体 Y ともに，BC 間以外の面との摩擦は無視できるとする。

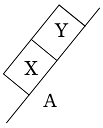


図２

物体 X と物体 Y を支えていた手を離すと，物体 X と物体 Y はともに斜面を静かにすべり落ちはじめた。そして，物体 X が点 C を通過した後，しばらくして，物体 Y が点 C を通過した。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。答えは a，b，c，g，k，m，μ_X，μ_Y から適切なものを用いて表せ。

(1) 点 B に達したときの物体 X の速さ v_B を求めよ。

(2) 動摩擦係数 μ_X と μ_Y の大小関係を書け。

(3) 物体 X が点 C を通過したときの速さが，点 B における速さ v_B と同じであった。$\tan\theta$ を求めよ。

物体 X は，点 C を通過した後，斜面をすべり落ちて，点 E でばねの右端に接し，以後離れないで運動した。そして，ばねがいったん縮んでふたたび自然長に戻った瞬間に，物体 Y が物体 X にはねかえり係数(反発係数) 1 で衝突した。

(4) ばねが最も縮んだときの，自然長からの縮み x を求めよ。

(5) ばねが最も縮んだ瞬間から初めて自然長に戻るまでの時間 t を求めよ。

(6) 物体 X と衝突した直後の物体 Y の速さ v_E を求めよ。

衝突後，物体 Y は D を通過し，斜面を上方へと運動した。

(7) 物体 Y が，物体 X との衝突後初めて点 C を通過するときの速さ v_C を求めよ。

(8) 物体 Y の最高到達点が BC 間にあるために，b が満たすべき条件を求めよ。

(9) (8) で最高点に達した後の物体 Y の運動はどのようになるか。理由とともに述べよ。

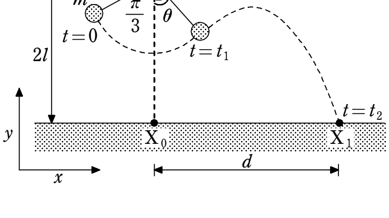
$\boxed{2}$ 14糸につるされた物体の運動[2014 北海道大]

図のように，水平な地面から高さ $2l$ [m] の位置に固定された点 P に長さ l [m] の糸の一端をつなぎ，糸の他端には質量 m [kg] のおもりをつける。初め，糸と鉛直下向きとのなす角を $\frac{\pi}{3}$ rad にして，おもりを静止させておく。時刻 $t=0$ s におもりを静かにはなした。

その後，おもりは点 P の真下に到達し，時刻 t_1 [s] に鉛直下向きに対する糸の傾斜角が初めて θ [rad] になった。この時刻におもりを糸から切りはなすと，おもりは時刻 t_2 [s] に地面上の点 X_1 に落下した。点 P を通る鉛直線と地面との交点を X_0 として，点 X_0 から点 X_1 までの距離 d [m] を求めよう。

ただし，重力加速度の大きさを g [m/s^2] とし，おもりの大きさ，糸の質量，空気抵抗は無視でき，糸はたるまないものとする。また，図のように，水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸をとり，角度 θ の正の向きを反時計回りにとる。

以下の文章中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ク}}$ に適切な数式を入れよ。また，$\boxed{\text{a}}$ ～ $\boxed{\text{d}}$ では選択肢から適切な数式を選び，記号で答えよ。(3) では，文章中の指示にしたがって理由を説明せよ。



(1) 初めに，おもりを切りはなす際の糸の傾斜角 θ が 0 rad と $\frac{\pi}{3}$ rad のときの距離 d を考えよう。

$\theta=0$ の場合，時刻 $t=0$ でのおもりの重力による位置エネルギーは，時刻 t_1 における値よりも $\boxed{\text{ア}}$ [J] だけ大きいので，力学的エネルギー保存の法則から，時刻 t_1 におけるおもりの速度の大きさは $\boxed{\text{イ}}$ [m/s] となる。この速度の y 成分が 0 であることを考慮すると，糸が切りはなされてからおもりが地面に落下するまでの時間は $\boxed{\text{ウ}}$ [s] となる。したがって，$\theta=0$ に対する距離 d は $\boxed{\text{エ}}$ [m] である。

一方，$\theta=\frac{\pi}{3}$ の場合は，時刻 t_1 におけるおもりの速さが 0 となることから，$d=\boxed{\text{オ}}$ [m] であることがわかる。

(2) 次に，$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}$ にある任意の角度 θ に対する距離 d を考えよう。力学的エネルギー保存の法則より，時刻 t_1 におけるおもりの速度の大きさは $v=\boxed{\text{カ}}$ [m/s] となる。この速度の x 成分 v_x [m/s] は $v\times\boxed{\text{a}}$ [m/s]，y 成分 v_y [m/s] は $v\times\boxed{\text{b}}$ [m/s] である。このときのおもりの地面からの高さは $\boxed{\text{キ}}$ [m] であるので，おもりが糸から切りはなされてから地面に落下するまでの時間は v_y を用いて $\boxed{\text{ク}}$ [s] と表され，これを l，θ，および g のみを使って表すと $\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\sqrt{\boxed{\text{c}}}\times\sin\theta+\sqrt{\boxed{\text{d}}}\right)$ [s] となる。したがって，距離 d は

$l\left\{\sin\theta+\left(\boxed{\text{c}}\right)\times\sin\theta\cos\theta+\sqrt{\left(\boxed{\text{c}}\right)\times\left(\boxed{\text{d}}\right)}\times\cos\theta\right\}$ [m] となり，m や g によらず，l に比例することがわかる。

(3) (2) で求めた距離 d は，$0<\theta<\frac{\pi}{3}$ の範囲内のある θ において最大となる。この理由を，十分に小さな θ に対する d の大きさと，$\theta=0$ および $\frac{\pi}{3}$ に対する d の大きさを比較することにより説明せよ。なお，十分に小さな θ に対する d を求める際，$\sin\theta\fallingdotseq\theta$ および $\cos\theta\fallingdotseq 1$ としてよい。

$\boxed{\text{a}}$ ～ $\boxed{\text{d}}$ の選択肢

① $\sin\theta$	② $\cos\theta$	③ $1-\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$
④ $2\cos\theta-1$	⑤ $1-\frac{4}{3}\sin^2\theta$	⑥ $\frac{4}{3}\cos^2\theta-\frac{1}{3}$
⑦ $3+\cos\theta-2\cos^2\theta$	⑧ $3+\cos^2\theta-2\cos^3\theta$	⑨ $3+\cos^3\theta-2\cos^4\theta$

 Copyrights Makeage,Inc. Allrights Reserved.

3 11台車上の小球の運動［2011 大阪大］

図１のように，円弧状のすべり面をもつすべり台Ａを固定した台車が水平な床に置かれている。ただし，台車の上面は床に平行である。すべり台Ａの左端と右端の高さはそれぞれ H と h であり，その円弧の半径は $H-h$ で，その表面はなめらかである。このすべり台Ａ上に置かれた質量 m の小物体Ｐの運動を考えよう。以下の設問では，重力加速度の大きさを g とし，すべての運動は紙面内に限るとする。また，すべり台Ａの右端で台車上面の点をＯとする。

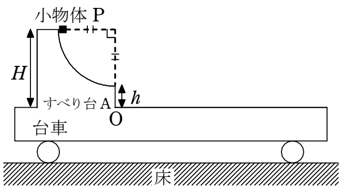


図１

［A］ まず，台車が床に固定されている場合について考える。小物体Ｐをすべり台Ａの円弧上，台車から高さ H の点に置き，静かに手をはなすと，小物体Ｐは摩擦力を受けることなく円弧上をすべり落ち，すべり台Ａから水平に飛びだし，台車上に落下した。

(1) すべり台Ａから飛びだす瞬間の小物体Ｐの速さ v_0 を求めよ。

(2) 小物体Ｐが台車上面に落下した点のＯからの距離を m，g，H，h の中から必要なものを使って表せ。

［B］ 図２のように，質量 M，長さ l，高さ h の台Ｂをすべり台Ａに接して置く。ただし，台Ｂの上面は水平である。この場合も台車は床に固定されている。台Ｂの上面と下面のなめらかさは大きく異なり，台Ｂの上面と小物体Ｐとの間の動摩擦係数は μ_1，台Ｂの下面と台車との間の動摩擦係数は μ_2 で静止摩擦係数は μ_0 とする。小物体Ｐをすべり台Ａの円弧上，台車から高さ H の点に置き，静かに手をはなすと，小物体Ｐはすべり台Ａ上を摩擦力を受けることなくすべり落ちた後，台Ｂ上を摩擦力を受けながらすべり，台Ｂ上の右端から飛びだした。また，台Ｂも小物体Ｐとの間の摩擦力により右に動きだした。

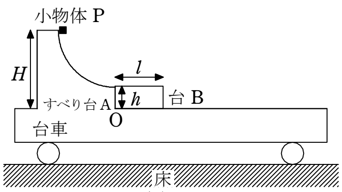


図２

(3) 台Ｂが動きだすための静止摩擦係数 μ_0 の満たすべき条件，および動きだした直後の台Ｂの加速度 a の大きさを求めよ。

(4) 小物体Ｐが台Ｂから離れる瞬間の台Ｂに対する速さ v_1 を μ_1，g，a，v_0，l の中から必要なものを使って表せ。ただし，v_0 は(1)で求めた速さ v_0 である。

(5) 小物体Ｐが台Ｂに乗り移ってから台Ｂを離れるまでの時間 T を μ_1，g，a，v_0，l の中から必要なものを使って表せ。

［C］ 次に，図３のように台Ｂを取り除き，台車を右向きに一定の加速度 α で動かしている場合を考える。

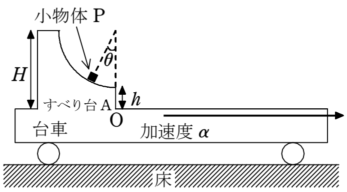


図３

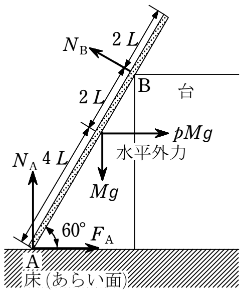
(6) 小物体Ｐを，すべり台Ａの円弧上で鉛直となす角 θ の位置にそっと置いたところ，小物体Ｐは置かれた位置ですべり台Ａに対して静止したままであった。このとき，加速度 α の大きさを求めよ。

(7) 小物体Ｐを，すべり台Ａの円弧上で台車からの高さ H の点ですべり台Ａに対して静止するように置いてそっとはなした。すると，小物体Ｐは円弧上をすべり落ちた後，すべり台Ａから水平に飛びだした。すべり台Ａから飛びだす瞬間の台車に対する小物体Ｐの速さ V を m，H，h，g，θ の中から必要なものを使って表せ。

(8) すべり台Ａの円弧上のある位置で，小物体Ｐをすべり台Ａに対して静止するように置きそっとはなした。すると，小物体Ｐは円弧上をすべり落ちた後，台車に対する速さ V_0 ですべり台Ａから水平に飛びだした。その後，小物体Ｐは台車上面で１回はね，すべり台Ａから飛びだした位置に再びもどってきた。このときの V_0 と，小物体Ｐがすべり台Ａ上にもどってきたときの台車に対する速さ V_1 をそれぞれ m，h，g，α の中から必要なものを使って表せ。ただし，小物体Ｐと台車上面との間のはね返り係数（反発係数）は１とする。

4 07あらい床上の棒のつりあい［2007 大阪大］

図のように，長さ $8L$，質量 M の細く一様な剛体棒が，水平な床の上に床と角度60°となるように置かれ，上端から $2L$ の位置で台のカドと接するように立てかけてある。台のカドはなめらかで，棒との間に摩擦力ははたらかない。床面はあらく，棒との間に摩擦力がはたらく。棒が床面に接する点をＡとし，Ａにおいて棒が床から受ける垂直抗力の大きさを N_A，摩擦力を F_A とする。また，棒が台のカドと接する点をＢとし，棒に垂直な方向にはたらくＢにおける抗力の大きさを N_B とする。F_A の正の向きは図に示す矢印の向きとする。また，棒と床面の間の静止摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g とする。棒の中心には重力 Mg がはたらく。



［A］ 水平な外力を棒の中心に加えたところ，棒は静止したままであった。水平外力の大きさは棒の重さの p 倍（pMg）とし，右向きにはたらくときに $p>0$ とする。

(1) 棒にはたらく力の，点Ａのまわりのモーメントのつりあいより，N_B を，M，L，g，p のうちの必要なものを用いて表せ。

(2) 棒にはたらく力のつりあいより，N_A を，M，L，g，p のうちの必要なものを用いて表せ。

(3) 棒にはたらく力のつりあいより，F_A を，M，L，g，p のうちの必要なものを用いて表せ。

(4) $p=0$ のときに棒が静止しているための μ の範囲を求めよ。

［B］ 次に，棒が動かないように手で支えてから，棒の中心に水平外力を加えた。手を棒から離すと，水平外力（pMg）と静止摩擦係数（μ）の大きさに応じて，棒は静止したままか運動を始めるかのいずれかである。棒が静止したままであるためには，次の３つの条件が同時に満たされなければならない。

（条件ａ） 台のカド（点Ｂ）から棒が離れない。

（条件ｂ） 床から棒が離れない。

（条件ｃ） 床に接する棒の端部が左にも右にもすべらない。

いまの場合，条件ｂは，条件ｃが満たされているときには必ず満たされている。

(5) 左向きの大きな水平外力（$p<0$）を加えたときに，条件ａが破れてしまう。条件ａが満たされるための，p の範囲を求めよ。

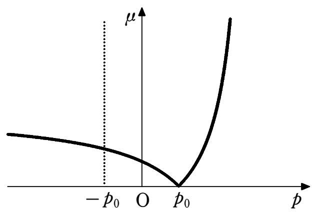
(6) 床の静止摩擦係数が小さいときに条件ｃが破れてしまう。棒の下端が左にすべらないために μ，N_A，F_A が満たすべき条件式を適当に式変形すると，p と μ の間の関係式として次のように表される。（ア），（イ），（ウ）に適当な数を入れよ。

$$\mu p+\boxed{\text{ア}}\,p+\boxed{\text{イ}}\,\mu+\boxed{\text{ウ}}\leqq 0$$

(7) 同様にして，棒の下端が右にすべらないために p と μ が満たすべき条件は次式で表される。（エ），（オ），（カ）に適当な数を入れよ。

$$\mu p+\boxed{\text{エ}}\,p+\boxed{\text{オ}}\,\mu+\boxed{\text{カ}}\leqq 0$$

(8) 条件ａ，ｂ，ｃが同時に満たされて棒が静止したままであるために p と μ が満たすべき領域を，右のグラフに斜線で示せ。ただし，グラフに記した直線や曲線のうち，必要なものを使うこと。さらに，グラフ中の p_0 の値も答えよ。



なお，$\mu p+\alpha p+\beta\mu+\gamma=0$ なる式は，$\mu=\dfrac{\alpha\beta-\gamma}{p+\beta}-\alpha$ と変形される。この式は $p=-\beta$ と，$\mu=-\alpha$ を漸近線とする双曲線を表す。グラフ中の曲線はいずれも(6)，(7)の条件に対応する双曲線の一部になっている。

Copyrights Makeage,Inc. Allrights Reserved.

5 05自転車の加速と減速［2005 東北大］

図1のような自転車の加速と減速について考えよう。前輪と後輪の大きさは同じであり，それらは水平な地面に接している。自転車の車輪の中心の間隔は $L=L_A+L_B$ で，運転者を含む自転車全体の重心は前輪と後輪の中心を結ぶ線分を $L_A:L_B$(ただし $L_A>L_B$)に分ける垂線上で地面からの高さ H の位置にある。図2に示すように，運転者を含む自転車全体の質量を m，重力加速度の大きさを g，前輪および後輪が地面から受ける垂直抗力の大きさをそれぞれ N_A および N_B とする。また，車輪と地面との間の静止摩擦係数を μ とする。車輪がすべらないとき，接地点における車輪と地面との相対速度は0であり，自転車は後輪をまわす力を地面との摩擦を利用して駆動力(推進力) f_B に変えることにより加速される。また，前輪および後輪の制動装置(ブレーキ)を用いてそれぞれ独立に制動力(減速する力)を与えることができ，そのとき，前輪および後輪の接地点に図2の f_B とは逆向きの制動力が生じる。

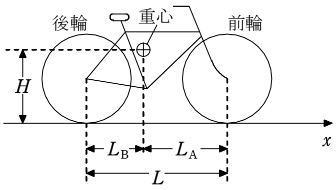


図1：自転車の模式図

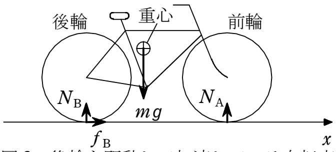


図2：後輪を駆動して加速している自転車に作用する力

地面上で自転車の前方(図の右方)が正の向きとなるように x 軸をとり，自転車が x 軸にそって運動するとき，以下の問いに答えよ。ただし，自転車の運動に伴う空気の抵抗や車輪の回転軸の抵抗および車輪の質量は無視できるものとし，自転車は進行方向に対して左右に傾くことはないものとする。

(1) 自転車が x 軸の正の向きに速度 v で等速度運動しているとき，N_A および N_B を，m，g，v，H，L_A，L_B(L を用いてもよい)のうち必要なものを用いて表せ。

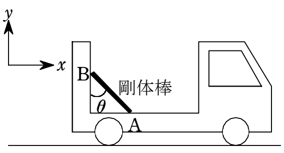
(2) μ が十分大きく，車輪がすべらないとき，自転車の後輪を駆動して加速度 a $(a>0)$ で前方に加速した。このとき，駆動力を徐々に大きくしていくと，$a>a_1$ のときに前輪が浮き上がった。$a\leqq a_1$ のとき，N_A および N_B を，m，g，a，H，L_A，L_B(L を用いてもよい)のうち必要なものを用いて表し，それぞれを a の関数としてグラフにかけ。また，前輪が浮き上がらない最大の加速度 a_1 を m，g，H，L_A，L_B(L を用いてもよい)のうち必要なものを用いて表せ。

(3) 次に，μ が小さな地面で(2)と同じ実験をしたとき，駆動力を徐々に大きくしていくと，a が a_2 に達したときに後輪がすべり出し，前輪は浮き上がらなかった。a_2 を，m，g，μ，H，L_A，L_B(L を用いてもよい)のうち必要なものを用いて表せ。また，$\mu\ll\dfrac{L}{H}$ のとき，$a_2\fallingdotseq\dfrac{L_A}{L}\mu g$ と近似できることを示せ。

(4) x 軸の正の向きに速度 v で運動している自転車に，車輪が両輪ともすべらないようにかつ浮き上がらないように調整して両輪に制動(ブレーキ)をかけた。このときの加速度を $-a$ $(a>0)$ とする。a の最大値 a_3 を，$\mu<\dfrac{L_A}{H}$ および $\mu\geqq\dfrac{L_A}{H}$ のそれぞれの場合について m，g，μ，H，L_A，L_B(L を用いてもよい)のうち必要なものを用いて表せ。

6 04非慣性系における剛体のつりあい［2004 大阪大］

図のように，長さ L，質量 M の細く一様な剛体棒が，トラックの荷台後部の鉛直面に立てかけてある。水平方向に x 軸，鉛直方向に y 軸を，図のようにとる。荷台の鉛直面はなめらかで，棒との間に摩擦力ははたらかない。荷台の水平面はあらく，棒との間に摩擦力がはたらく。



棒は xy 平面内にあり，荷台の鉛直面と角度 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ をなしている。棒が荷台の水平面に接する点をAとし，Aにおいて棒が荷台から受ける垂直抗力の大きさを N_A，摩擦力の大きさを F_A とする。また，棒が荷台の鉛直面に接する点をBとし，Bにおける垂直抗力の大きさを N_B とする。棒と荷台の水平面の間の静止摩擦係数を μ，重力加速度の大きさを g とする。道路は水平として，以下の問いに答えよ。

最初，トラックは道路上に停止していた。このとき，棒は静止していた。

(1) 棒にはたらく力のつりあいの式を，水平成分および鉛直成分それぞれについて，F_A，N_A，N_B，M，g のうちの必要なものを用いて表せ。

(2) 点Aのまわりの，棒にはたらく力のモーメントのつりあいの式を，N_B，θ，L，M，g のうちの必要なものを用いて表せ。

(3) 棒が動かないための θ の最大値を θ_m とする。$\tan\theta_m$ を，L，M，g，μ のうちの必要なものを用いて表せ。

次に，停止していたトラックは，一定の大きさ a_1 $(a_1>0)$ の加速度で前方(x 軸の正の向き)に動きだした。このとき，棒は荷台に対して動かなかった。以下の(4)から(8)では，$0<\theta\leqq\theta_m$ とする。

(4) N_B と F_A を，a_1，θ，L，M，g のうちの必要なものを用いて，それぞれ表せ。

(5) 棒が荷台に対して動かないためには，a_1 と $\tan\theta$ の間に，ある関係がなければならない。この関係を，a_1，θ，L，M，g，μ のうちの必要なものを用いて，不等式で表せ。

その後，トラックは一定の加速度で減速を始めた。この加速度の大きさを a_2 $(a_2>0)$ とする。減速中，棒は荷台に対して動かなかった。

(6) N_B と F_A を，a_2，θ，L，M，g のうちの必要なものを用いて，それぞれ表せ。

(7) 棒が荷台に対して動かないためには，a_2 と $\tan\theta$ の間に，ある関係がなければならない。この関係を，a_2，θ，L，M，g，μ のうちの必要なものを用いて，不等式で表せ。ただし，いくつかの不等式を用いて表してもよい。

(8) (7)で求めた，a_2 と $\tan\theta$ の関係を満たす領域を，グラフに斜線で示せ。