

1 12小球と斜面との衝突［2012 北海道大］

水平な床の上に，なめらかな斜面をもつ，くさび形の物体が置かれている。大きさが無視できる質量 m［kg］の小球が鉛直に落下し，この物体の斜面に衝突した。図1のように，斜面と床のなす角は θ［rad］$\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$ である。この小球が運動する鉛直面内で，水平右向きを x 軸正の向き，鉛直上向きを y 軸正の向きとする。小球が斜面と衝突する際のはねかえり係数（反発係数）は1とし，空気抵抗は無視してよい。また，重力加速度の大きさを g［m/s²］とする。文章中の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{シ}}$ に適切な数式を入れよ。

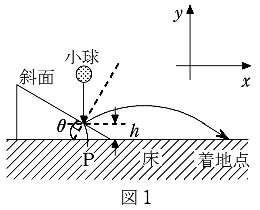


図1

(1) 初め，くさび形の物体は床に固定されており，小球が衝突しても動くことはない。また，図1のように，小球が衝突する点をPとする。衝突直前の小球の速さが v［m/s］のとき，衝突直後には小球の速度の x 軸方向成分 v_x［m/s］が $\boxed{\text{ア}}$［m/s］，y 軸方向成分の v_y［m/s］が $\boxed{\text{イ}}$［m/s］となる。衝突後の小球は，放物線軌道を描き床に着地した。衝突後，小球が達する最高点の位置を v_x，v_y を用いて表すと，x 軸方向に $\boxed{\text{ウ}}$［m］，y 軸方向に $\boxed{\text{エ}}$［m］だけPから離れた点となる。点Pの高さが床から h［m］のとき，着地点と最高点の x 軸方向の位置の差を v_x，v_y を用いて表すと $\boxed{\text{オ}}$［m］となる。

(2) 次に，図2に示すように，(1)のくさび形の物体を床に対して一定の速さ V［m/s］で x 軸正の向きに運動させ，落下する小球を斜面に衝突させた。衝突の際，くさび形の物体の速度は変化しないとする。このとき，床に静止している観測者Aから見ると，小球は鉛直下向きに速さ v［m/s］で斜面に衝突した。

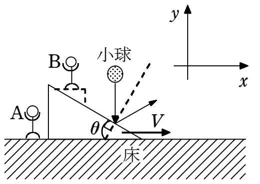


図2

くさび形物体上の観測者Bから見た衝突直前の小球の速度の x 軸，y 軸方向成分は，v と V を用いてそれぞれ $\boxed{\text{カ}}$［m/s］，$\boxed{\text{キ}}$［m/s］となる。観測者Bから見ると，小球は斜面に垂直に衝突した。このとき V は，v と θ を用いて $\boxed{\text{ク}}$［m/s］と表される。

この小球の衝突を，床に静止している観測者Aから見た場合を考える。このとき，小球の衝突直後の x 軸，y 軸方向の速度成分は，v と V を用いてそれぞれ $\boxed{\text{ケ}}$［m/s］，$\boxed{\text{コ}}$［m/s］と書ける。また，小球が動いている物体の斜面から受けた力積の x，y 成分は，m，v，V を用いて，それぞれ $\boxed{\text{サ}}$［N·s］，$\boxed{\text{シ}}$［N·s］となる。

2 16斜面をもつ台と物体の運動と衝突［2016 東北大］

図1のように，断面が三角形で質量が m_A の物体Aが水平面上に置かれ，物体Aの上に質量 m_B の小球Bが置かれている。この状態で，物体Aに水平方向の外力を加えたときの運動について考える。すべての物体は紙面と平行な方向にのみ運動し，物体Aは常にその底面が水平面から離れることなく運動する。また，物体Aの斜面に垂直に固定された平板により，小球Bが点Oより下方に動くことはない。なお，点Oは物体Aの斜面上にあり，そこから斜面にそって頂点Pへ向かう向きを x 軸，斜面と直交して上向きを y 軸とする。小球Bの大きさ，すべての表面間の摩擦，空気抵抗，平板の質量は無視できるものとし，重力加速度の大きさを g，物体Aの傾斜角を θ $(0°<\theta<90°)$ として，次の(1)～(3)に答えよ。

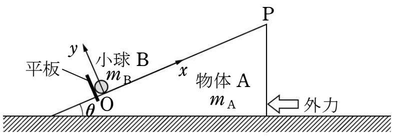


図1

(1) 最初は重力以外の外力がなく，小球Bが点Oの位置に静止した状態にあるものとし，ある時点から図1のように外力が加わった場合を考える。

(a) 外力が加わったことにより，物体Aが加速度 a_A で運動を始めた。このとき物体Aに固定された観測点から見ると，小球Bには，物体Aの加速度とは逆の向きに，大きさ $|m_B a_A|$ の慣性力がはたらいていると考えることができる。このとき小球Bに作用する重力と慣性力の合力 $\vec{F}$ を，x 成分 F_x と y 成分 F_y に分けて，それぞれ m_A，m_B，g，θ，a_A のうちから必要なものを用いて表せ。なお，a_A は水平面上に固定された観測点から見たときの加速度であり，図1の左向きへ加速する場合を正とする。

(b) (1)(a)で，小球Bが x 軸方向へ動きだすために，a_A が満たすべき条件は何か，m_A，m_B，g，θ のうちから必要なものを用いて表せ。

(2) 図2のように物体Aにばね定数 k のばねを取りつけ，ばねのもう一端を水平面に固定された壁につなげた場合を考える。ただし，ばねの質量は無視できるものとする。なお，点Oから点Pまでの距離は十分に長く，小球Bが物体Aの斜面の頂点Pに達することはないものとする。また，小球Bの質量は物体Aの質量に比べて十分に小さく，物体Aの運動を考えるうえで小球Bの影響は無視できるものとする。

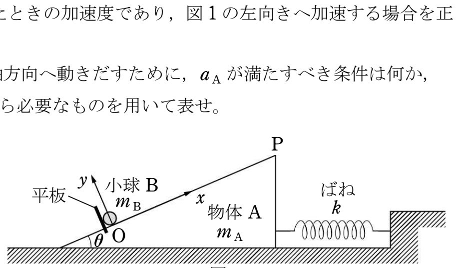


図2

(a) ばねが自然の長さより L だけ短くなるように水平に物体Aを動かし，静かに手をはなす。このとき，点Oにある小球Bが x 軸方向へ動きだすための L が満たすべき条件は何か，m_A，m_B，g，k，θ のうちから必要なものを用いて表せ。

(b) 物体Aと小球Bについて，(2)(a)で動きだした後の運動を考える。小球Bが常に物体Aの斜面から離れず，斜面と接し続けるために L が満たすべき条件は何か，m_A，m_B，g，k，θ のうちから必要なものを用いて表せ。

(c) (2)の(a)(b)をともに満たす L の範囲は，物体Aの傾斜角 θ によって変化する。そして，ある傾斜角 θ_{max} 以上では，(a)と(b)がともに成立するような L は存在しない。θ_{max} の値を求めるとともに，(2)の(a)(b)をともに満たす L の範囲と θ の関係を図示せよ。なお，図示の際には，L を縦軸とし，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の中から適切なものを1つ選択して横軸とすること。さらに，(2)の(a)(b)をともに満たす L の範囲を斜線で塗りつぶすこと。ただし，この図において境界線が範囲に含まれるか否かは明らかにしなくてよい。

(3) 図3のように，小球Bを質量 m_C の小球Cに取りかえる。小球Bと小球Cの違いは質量のみである。ここで，物体Aの運動にとって小球Cの影響は無視できないものとし，また，$\theta=30°$ とする。それ以外の条件は(2)と同じとする。

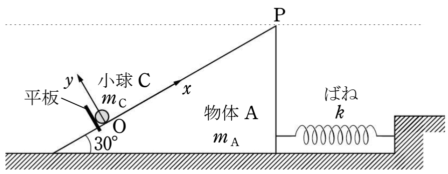


図3

(a) ばねが自然の長さより L だけ短くなるように水平に物体Aを動かし，静かに手をはなすと，小球Cが点Oから x 軸方向へ動きだし，斜面から離れることなく点Oにもどってきた。小球Cは点Oにもどるときに平板と衝突し，衝突直前の平板に対する小球Cの相対速度は $\vec{v_C}$ $(|\vec{v_C}|=v_C)$ であった。一方，その衝突直前の物体Aと平板の速度は v_A，衝突直後の物体Aと平板の速度は v_A' であった。なお，v_A と v_A' は，ともに水平面上に固定された観測点から見た速度であり，図3の左向きへ進む場合を正とする。

衝突直後の物体Aの速度 v_A' を，v_A，v_C，m_A，m_C，g，k，L のうちから必要なものを用いて表せ。なお，小球Cと平板の間の反発係数は0であり，この衝突は瞬間的に起こるものとする。

(b) (3)(a)の衝突は，物体Aが動きだしてから，ばねが最も伸びる時点までの間に生じていた。そして，衝突後にばねが最も伸びたとき，ばねは自然の長さより L' だけ長かった。L' を，v_A，v_C，m_A，m_C，g，k，L のうちから必要なものを用いて表せ。

3 16物体の分裂と鉛直面内の円運動［2016 北海道大］

運動しながら，その一部をある相対速度で分離できるしくみをもつ物体がある。その分離前と後の運動のようすを，球の運動として考える。

重力加速度の大きさを g［m/s^2］とし，球の運動における空気の抵抗および球の大きさの影響は無視できるものとする。次の文の［ア］～［シ］に適切な数式または数値を入れよ。

⑴　図1のように，摩擦のない水平な床の上の球の運動を考える。初めに球は速度 V_0［m/s］で正の向き（右向き）に等速運動していた。質量 m_1［kg］をもつ球1と質量 m_2［kg］の球2の2つに分離したとき，球1の速度が V_0-v［m/s］であれば，この球が分離で受けたすべての力積は［ア］［N·s］である。このとき，球2の運動量の変化は［イ］［kg·m/s］であり，速度［ウ］［m/s］で正の向きに運動する。分離がこのように起これば，分離の前後で運動量の総和は保存される。一方，球1と2の運動エネルギーの和は分離によって［エ］［J］だけ増加する。

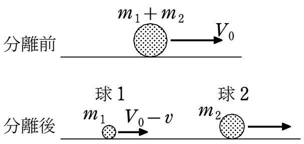
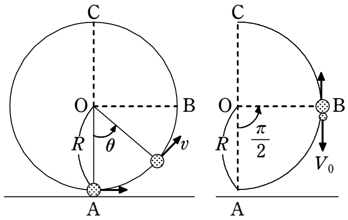


図1

⑵　図2(a)のように，質量 M［kg］の球を一定の長さ R［m］の糸で鉛直上方の点Oからつり下げ，静止した球の位置をAとする。水平方向の正の向き（右向き）に速度を与えると，球はOのまわりで運動を始めた。図のように，Aから反時計回りに角度 θ［rad］をとり，$\theta=\frac{\pi}{2}$［rad］の円周上の位置をB，π［rad］をCとする。位置 θ において速度 v［m/s］で円周上を運動している球の力学的エネルギーは，点Aを位置エネルギーの基準点として v と θ を用いて表すと［オ］［J］であり，糸の張力の大きさは［カ］［N］である。



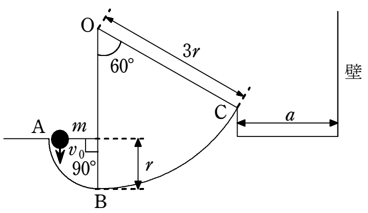
(a)　(b)
図2

いま，Aで正の向きに，ある初速度 V_0［m/s］を与えたところ，球はBまで運動し，それより先へは達しなかった。この初速度 V_0 は［キ］［m/s］である。糸の張力の大きさは $\theta=\frac{\pi}{3}$［rad］で［ク］［N］である。

次に，質量 M［kg］の球が，(キ)の初速度 V_0［m/s］で点Aから正の向きに運動を始め，Bに達した瞬間に図2(b)のように質量 $\frac{M}{2}$［kg］が分離され鉛直下方に速さ V_0［m/s］で運動した。Oのまわりで糸につながれた残りの質量 $\frac{M}{2}$［kg］の球が円周上を運動した。このとき，角度 θ における球の速さは，(キ)を用いると［ケ］$\times V_0$［m/s］であり，球は $\tan\theta=$［コ］となる位置で円周上から離れる。また，もしBで分離して発射する質量が［サ］$\times M$［kg］以上であれば，球はBで上向きの速度［シ］$\times V_0$［m/s］以上で運動し，Cに達する。

4 06スノーボードの円運動［2006 東北大］

図はスノーボード用の滑走コースの断面図である。半径 r の円弧ABが，点Oを中心とする半径 $3r$ の円弧BCに点Bでなめらかに接続されている。図中のOBは鉛直で，円弧ABの中心角は90度，円弧BCの中心角は60度である。円弧BCの右端の点Cから右側に距離 a だけ離れた位置には，図に示した断面に垂直で鉛直な壁がある。スノーボードや人の大きさは，滑走コースの大きさに比べて無視できるほど小さいため，スノーボードと人を合わせて一つの小球と考えてよい。所持品などを含めた人の質量とスノーボードの質量の合計が m であるとして，以下では，人とスノーボードを合わせて「ボード」と略してよぶことにする。このとき，点Aからボードを鉛直下向きの初速 v_0 で滑走させた後の運動を考える。ただし，円弧ABとBCにそった面とボードの間には摩擦がなく，空気抵抗も無視できるものとし，重力加速度の大きさを g とする。また，運動はこの断面内に限られるものとする。以下の問いに答えよ。



⑴　初速 $v_0=0$ で点Aから滑走を開始したボードが点Bを右向きに通過した。

(a)　点Bでのボードの速さ v_1 を，m，r，g の中から必要なものを用いて表せ。

(b)　点Bを通過する直前と直後にボードがコースから受ける垂直抗力を，それぞれ N，N' とする。それらの比 $\frac{N'}{N}$ を求めよ。ただし，ボードが点Bを通過する直前と直後の運動は，それぞれ等速円運動と考えてよい。

⑵　次に，初速を $v_0=2\sqrt{gr}$ としたところ，ボードは点Cから速さ v_2 で飛び出した。その後ボードは壁に衝突してはねかえった。ただし，ボードと壁の反発係数を e $(0<e<1)$ とする。

(a)　v_2 を，m，r，g の中から必要なものを用いて表せ。

(b)　点Cから飛び出したボードは壁に垂直に衝突した。距離 a を，m，r，g の中から必要なものを用いて表せ。

(c)　(2)(b)のようにボードが壁に垂直に衝突した場合には，そのままではボードは円弧のコース上に戻ることができない。コース上に戻るために，壁に衝突してボードがはねかえった直後に，人がもっていた質量 m_1 の物体を，図に示した断面内で水平に投げ捨てることを考える。投げ捨てた直後における，物体とボードとの相対的な速さを v_3 としたところ，ボードは点Cに戻った。v_3 を，m，m_1，r，g，e の中から必要なものを用いて表せ。ただし，この間，ボードが再び壁に衝突することも，捨てた物体が再びボードに戻ることもないものとする。

(d)　(2)(c)において，質量 m_1 が特定の値の場合は，捨てられた物体は，壁にそって鉛直下向きに落下する。このときの質量 m_1 を，m，r，g，e の中から必要なものを用いて表せ。

5 11斜面での単振動［2011 東北大］

図1のように，水平面に対して30°の角度をなすなめらかな斜面上に，断面が直角三角形で質量がMの物体Aを置いた。断面の1つの鋭角は30°であり，物体Aの上面はなめらかで水平である。物体Aの上面に質量mの小球Bを衝突させたときの運動について考える。重力加速度の大きさをgとし，すべての物体は紙面内でのみ運動し，小球の大きさ，すべての摩擦および空気抵抗は無視できるものとして，次の問いに答えよ。

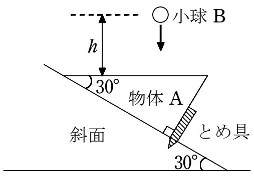


図1

(1) 物体Aが斜面に固定されたとめ具に支えられている場合を考える。

(a) 物体Aが受ける，斜面からの垂直抗力N_1と，とめ具からの垂直抗力N_2の大きさを，M，gを用いて表せ。

(b) 物体Aの上面からの高さがhの地点から，質量mの小球Bを初速度0で落下させると，小球Bは物体Aと衝突し，物体Aの上面から高さh'の地点まではねかえった。小球Bと物体Aとの間のはねかえり係数(反発係数)eを，h，h'を用いて表せ。

(2) 次にとめ具を外し，質量の無視できるばねの一方を物体Aに，もう一方をなめらかな斜面の下端に固定したところ，ばねが自然の長さからd_0縮んだ状態でつりあった(図2)。図のように，物体Aの上辺と斜面の交点を原点Oとし，水平右向きがx軸正の向き，鉛直上向きがy軸正の向きとなるように，斜面に固定された座標軸をとる。物体Aの上辺に点Qをとると，図2の点Qの座標は$(a,\ 0)$となる。つりあいの位置からさらにばねを$2\pi d_0$縮め，時刻$t=0$で静かに手をはなすと(図3)，物体Aは周期Tの単振動をした。同じく時刻$t=0$で，座標$(a,\ h_0)$の地点から質量mの別の小球Cを初速度0で落下させたところ，時刻$t=\dfrac{T}{4}$に，点Qが初めて座標$(a,\ 0)$を通過し，同時に，小球Cが物体Aと点Qで弾性衝突(はねかえり係数1)をしてはね上がった。その後，小球Cは落下し，点Qで物体Aと再び衝突した。ばね定数をkとし，物体Aの質量は小球Cの質量に比べて十分に大きく，物体Aの速度は衝突の影響を受けないものとする。

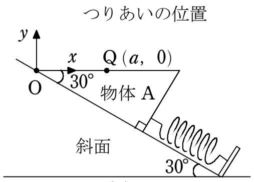


図2

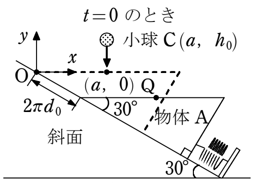


図3

(a) d_0を，g，k，Mを用いて表せ。また，周期Tを，k，Mを用いて表せ。

(b) h_0を，g，k，Mを用いて表せ。

(c) 最初の衝突の直前および直後の小球Cの速度のy成分をそれぞれv_0，v_1とし，時刻$t=\dfrac{T}{4}$における物体Aの速度のy成分をV_yとするとき，v_1を，v_0，V_yを用いて表せ。

(d) 時刻$t=\dfrac{T}{4}$における物体Aの速度のy成分V_yを，g，k，Mを用いて表せ。

(e) 物体Aと最初の衝突をした後，小球Cのy座標は，時刻t_1において最大値h_1に到達した。h_1とh_0の比$\dfrac{h_1}{h_0}$を求めよ。また，t_1を，Tを用いて表せ。

(f) 時刻$t=0$から$t=2T$までの間の，小球Cのy座標の時間変化を図4のグラフに実線でかけ。小球Cのy座標の最大値に○(白丸印)を，小球Cが物体Aと衝突した点に●(黒丸印)をつけて，その点の座標も含めてグラフに記入せよ。その際，y座標の値はh_0を用いて，tの値はTを用いて表せ。なお，図4に描かれている曲線は，点Qのy座標の時間変化である。

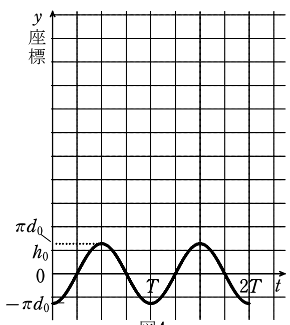


図4

6 10斜面での単振動［2010 九州大］

［A］ 自然の長さl，ばね定数kのばねが一端は固定され，他端には質量mの板が取り付けられて，なめらかな水平面上に置かれている。その板に接して質量Mの小物体を置き，図1のように小物体と板とを接触させたまま，ばねを長さdだけ縮めて静かに手をはなした。ばねは十分軽くその質量は無視できる。また空気抵抗も無視できる。

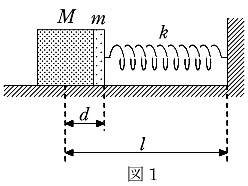


図1

(1) はじめ小物体は板に接触したまま運動をする。接触した状態で自然の長さからのばねの縮みがxであるときの小物体の加速度の大きさを求めよ。

(2) 小物体はやがて板から離れる。手をはなしてから小物体が板から離れるまでにかかる時間を求めよ。

(3) 小物体が板から離れた直後の小物体の速度の大きさを求めよ。

［B］ 次に図2のように，前問で考えたなめらかな面を，水平面から角度θだけ傾けた場合を考えよう。小物体がない場合には，ばねが自然の長さlから長さx_0だけ伸びたつりあいの位置で板は静止する。図2のように小物体を板に接触させたまま，ばねを自然の長さからDだけ縮めて静かに手をはなした。重力加速度の大きさをgとする。

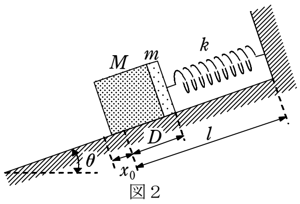


図2

(1) つりあいの位置におけるばねの伸びx_0を求めよ。

(2) 手をはなしたのち，小物体は板と接触したまま運動し，自然の長さからのばねの伸びがsのとき板から離れた。ばねの伸びsを求めよ。

(3) 板から離れた直後の小物体の速度の大きさを求めよ。答えはx_0を用いずに表せ。

(4) 板は小物体と離れたのち，単振動を行う。$M=\dfrac{7}{5}m$，$D=\dfrac{6}{5}x_0$であるとして，その単振動の振幅を(θは用いずに)x_0を用いて表せ。

(5) 小物体と離れてから，板は斜面下向きに運動し，一瞬静止したのち，斜面上向きに運動を始め，そして小物体と離れた位置(ばねの伸びがsの位置)にもどった。小物体と離れてから初めて同じ位置にもどるまでの時間を，mとkを用いて表せ。ただし，前問同様$M=\dfrac{7}{5}m$，$D=\dfrac{6}{5}x_0$であるとする。