1［2016 慶応義塾大］

2 輪車の加速・減速に関する次の問いに答えよ。

図 1 に 2 輪車 (質量 m，車体は変形しない，車輪は回転し，前輪と後輪は同じ材質・形状) を示す。車輪の半径は r，車輪の中心間距離は $5r$。重心の水平方向位置は前輪の中心から $1.5r$ で後輪の中心から $3.5r$，垂直方向は床から高さ $4r$ で車輪の中心の高さから $3r$ である。重心にすべての質量 m が集中しているとして，2 輪車にはたらく慣性力および重力は重心に作用するとせよ。下向きの重力加速度の大きさを g とし，床面と車輪の間の動摩擦力は床面から車輪への垂直抗力に比例する。空気抵抗は無視せよ。

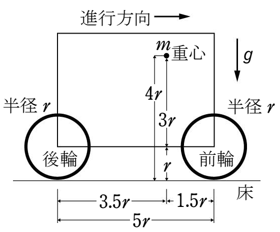


図 1

［A］ (1)　走行中の 2 輪車の前輪と後輪に強くブレーキをかけ両輪の回転を止めたところ，両輪が床面に接したまま 2 輪車は大きさ a の加速度で減速した。前輪と床面との動摩擦力の大きさを求めよ。

(2)　後輪が自由に回転する状態で，走行中の 2 輪車の前輪のみに強くブレーキをかけ回転を止めたところ，2 輪車は一定の加速度で減速した。後輪が浮き上がらないための，床面と車輪の動摩擦係数が満たすべき条件を示せ。

(3)　後輪が自由に回転する状態で，走行中の 2 輪車の前輪のみに軽くブレーキをかけ，前輪が床面をすべらずに回転するようにして，2 輪車を大きさ a の加速度で減速させた。後輪が浮き上がらないための a が満たすべき条件を示せ。車輪と床面との静止摩擦係数は十分に大きいとする。

［B］　前輪が自由に回転する状態で，静止している 2 輪車の後輪をエンジンで駆動し 2 輪車を大きさ a の加速度で加速した。車輪と床面との静止摩擦係数は十分に大きいとする。

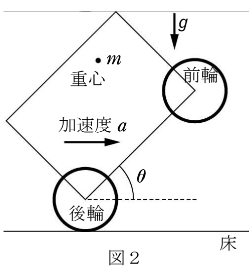


図 2

(1)　前輪が浮き上がらないための加速度の大きさ a が満たすべき条件を示せ。

(2)　ある加速度の大きさ a では，前輪が浮き上がり，車体が水平面となす角度が θ となった (図 2)。加速度 a を g，θ を用いて表せ。ただし，重心の水平位置は前輪と後輪の車軸間にあるとする。

(3)　前輪がかろうじて浮き上がらない最大の加速度で走行しているとき，小石を踏み，前輪がわずかに浮き上がった。仮に，この加速度を維持してさらに走行しようとした場合，2 輪車はどのような運動をするか，(1)，(2) を踏まえて理由をつけて答えよ。

2［2014 東京大］

図 1 に示すように，水平から角度 θ をなすなめらかな斜面の下端に，ばね定数 k のばねの一端が固定されている。斜面は点 A で水平面と交わっており，ばねの他端は自然の長さのとき点 A の位置にあるものとする。図 2 に示すように，質量 m の小球をばねに押しつけ，斜面にそって距離 x だけばねを縮めてから静かに手をはなす。その後の小球の運動について，次の問いに答えよ。ただし，重力加速度の大きさを g とする。また，小球の大きさとばねの質量は無視してよい。

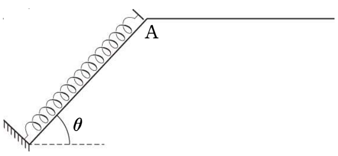


図 1

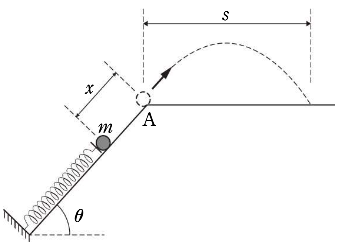


図 2

(1)　$x=x_0$ のとき，手をはなしても小球は静止したままであった。このときの x_0 を求めよ。

(2)　手をはなしたのち，小球が斜面から飛び出し水平面に投げ出されるための x の条件を，k，m，g，θ を用いて表せ。

(3)　$x=3x_0$ のとき，小球が動きだしてから点 A に達するまでの時間を求めよ。

次に，(2) の条件が成立し小球が投げ出された後の運動を考える。小球は点 A から速さ v で投げ出されたのち，水平距離 s だけ離れたところに落下する。点 A での速さが一定の場合は，$\theta=45°$ のとき落下までの水平距離が最大になることが知られているが，今回の場合は，θ によって v が変わるため，s が最大となる条件は異なる可能性がある。次の問いに答えよ。なお，必要であれば，表 1 の三角関数表を計算に利用してよい。

(4)　v を x，k，m，g，θ を用いて表し，x が一定のとき，s が最大となる θ は 45° より大きいか小さいか答えよ。

(5)　s を x，k，m，g，θ を用いて表せ。

(6)　$x=\dfrac{2mg}{k}$ のとき，表に示した角度の中から，s が最も大きくなる θ を選んで答えよ。

(7)　x を大きくしていくと，s が最大となる θ は何度に近づくか。表に示した角度の中から選んで答えよ。

表 1

θ	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
$\sin\theta$	0.17	0.26	0.34	0.42	0.50	0.57	0.64	0.71
$\cos\theta$	0.98	0.97	0.94	0.91	0.87	0.82	0.77	0.71

θ	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°
$\sin\theta$	0.77	0.82	0.87	0.91	0.94	0.97	0.98
$\cos\theta$	0.64	0.57	0.50	0.42	0.34	0.26	0.17

3［2007 東京工業大］

質量 m の物体が水平面と角 θ をなす斜面の上を運動する。物体と斜面の間の静止摩擦係数を μ，動摩擦係数を μ'，重力加速度の大きさを g とする。

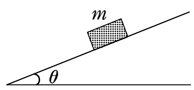


図 1

(1)　図 1 に示すように，斜面上に物体が静止しているとき，物体に斜面からはたらく静止摩擦力の大きさを $F_{\rm s}(\theta)$ とする。また，物体がすべっているとき，物体に斜面からはたらく動摩擦力の大きさを $F_{\rm k}(\theta)$ とする。$F_{\rm s}(\theta)$ と $F_{\rm k}(\theta)$ を求めよ。

次に，それぞれを mg で割った $f_{\rm s}(\theta)=\dfrac{F_{\rm s}(\theta)}{mg}$ と $f_{\rm k}(\theta)=\dfrac{F_{\rm k}(\theta)}{mg}$ を角 θ の関数として，グラフの概形をかけ。ただし，グラフをかく際は $\mu=\dfrac{5\mu'}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とせよ。なお，物体にはたらく力は斜面からの摩擦力，垂直抗力，および重力である。

(2)　図 2 に示すように，斜面にそって上向きに x 軸をとる。斜面上を上向きに運動する物体が，位置 $x=0$ を速さ V_0 で通過して最高点まで達し，その後，斜面をすべり下りた。物体が $x=0$ からその最高点まで達するのに要する時間 T を求めよ。また，物体がふたたび $x=0$ の点にもどってきたときの速さを V とするとき，比 $\dfrac{V}{V_0}$ を角 θ の関数として表せ。ただし，$\tan\theta>\mu$ とする。なお，運動している物体にはたらく力は斜面からの摩擦力，垂直抗力，および重力である。

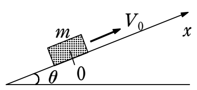


図 2

(3)　図 3 に示すように，斜面上の物体と質量 M の物体を，滑車にかけた軽くて伸びない糸で結ぶ。物体が静止したままであるための，質量 M に対する条件を求めよ。ただし，斜面上の物体から滑車に至る糸は斜面に平行であり，滑車は摩擦なく回転できるとする。

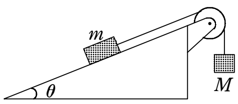


図 3

4 [2005 早稲田大]

図1のように，質量 m の物体Aが水平な床に置かれた質量 M の平板状の台Bに乗っている。台Bをうまく動かして，物体Aを思うような位置に移動させよう。ただし，物体Aと台Bの接触面はあらく，摩擦力がはたらくが，台Bと床の接触面はなめらかで，摩擦力ははたらかないとする。重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ。

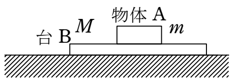


図1

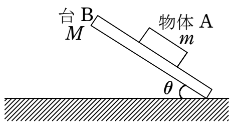


図2

(1)　図2に示すように，台Bの一端を床に固定し，台Bを静かに傾けていく。台Bと床との角度が θ になったとき，物体Aがすべり始めた。そして，台Bの上を長さ l だけすべるのに要した時間は t_0 であった。物体Aと台Bの間の静止摩擦係数 μ と動摩擦係数 μ' を求めよ。

以下の問いで摩擦係数が必要な場合は，静止摩擦係数として μ，動摩擦係数として μ' を使って答えよ。

(2)　台B上で物体Aを移動させるため，図3に示すように台Bを水平にもどし，一定の力を加えて動かした。力がある大きさを超えたところ，物体Aは台B上をすべり始めた。このときの力の大きさを求めよ。

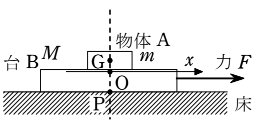


図3

以下の問いでは，図3に示すように，台Bに固定した x 座標軸を考え，物体Aの位置はその重心Gの x 座標を使って答えよ。

(3)　いま，x 座標軸の原点Oと物体Aの重心Gは床上の点P上にあり，物体A，台Bはともに静止していたとする。このとき，時刻 $t=0$ で(2)で求めた力より大きい力 F を x 軸の正の向きに加えて台Bを動かした。重心Gの台Bに対する相対運動の加速度を求めよ。

(4)　(3)の状態において，時刻 $t=T$ で台Bに加える力を0にした。その後しばらくして，物体Aは台Bに対して静止した。このときの台Bの速度および時刻 $t=T$ から静止するまでの時間を求めよ。さらに，物体Aの重心Gの位置座標はどのように表されるか。

ここで，物体Aの位置を移動させる操作について考える。(3)と(4)の操作のあと，物体Aの位置は台B上で移動している。そこで台Bをうまく出発位置までもどせば，物体Aの位置だけを変えられる。台Bに対して物体Aを静止させたまま座標軸の原点を点P上にもどすには，そのための力が(2)で求めた大きさを超えなければよい。この一連の操作をくり返すと，物体には直接力を加えることなくその位置だけを任意に移動させることができる。このような装置は，慣性駆動装置とよばれ，物体の位置を精密に制御するのに用いられている。以下で，この装置の動作について調べよう。

(5)　力 F を加える時間 T を力積 FT が一定になるようにしながら短くしていった極限を考える。ともに静止した状態にある物体A，台Bの組を考え，台Bに瞬間的に力を加えると，物体Aおよび台Bは運動を始めた。しばらくして，物体Aは(4)で述べたように台Bに対して静止した。このときの物体Aの重心Gの位置座標を求めよ。

その後，(2)で求めた力の大きさより小さな一定の力を加えて台Bの動きを止め，さらに点Pにもどすために同じ一定の力で台Bを反対方向に加速し，ちょうど座標原点がPにもどったときに台Bの速度が0になるように減速したとしよう。

(6)　(5)からの一連の操作で台Bに加えた力のした仕事はいくらか。

5 [2016 京都大]

次の文章を読んで，$\boxed{}$ に適した式または値を，問1では，指示に従って解答を記せ。

図1に示すように，傾斜角 θ の斜面とそれになだらかに続く水平面をもつ質量 M の台Qが，水平な床の上に置かれている。台Qと床の間には摩擦はない。

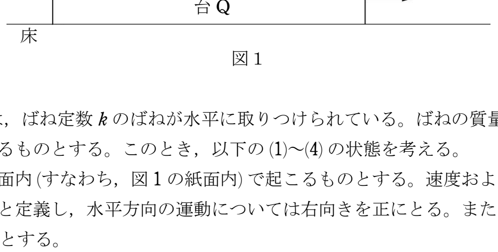


図1

台Qの水平面の右端には，ばね定数 k のばねが水平に取りつけられている。ばねの質量は十分小さくて無視できるものとする。このとき，以下の(1)〜(4)の状態を考える。

運動はすべて同一鉛直面内(すなわち，図1の紙面内)で起こるものとする。速度および加速度は床に対するものと定義し，水平方向の運動については右向きを正にとる。また，重力加速度の大きさを g とする。

(1)　床に対して静止している台Qの斜面部分の水平面から高さ h の位置に，大きさが無視できる質量 m の球(質点)Pを静かに載せると同時に，台Qを糸で一定の大きさの力で水平に引っ張り始めた。このとき，台Qと球Pは床に対して移動しつつ，球Pは水平面から高さ h の所にとどまった。球Pと台Qの間には摩擦はないものとする。球Pには重力と台Qからの抗力が作用しており，これら2つの力の合力が作用する方向が水平方向となす角の大きさは $\boxed{ア}$ となる。また，θ，m，M，g，h のうち必要なものを用いると，球Pが台Qから受ける抗力の大きさは $\boxed{イ}$，この抗力と重力の合力の大きさは $\boxed{ウ}$，球Pの水平方向の加速度は $\boxed{エ}$ と表せ，台Qに作用する力の合力の大きさは $\boxed{オ}$，糸が台Qを引っ張る力の大きさは $\boxed{カ}$ と表せる。

(2)　(1)の状態で，ある時間が経過したときに糸を切ったところ，球Pは台Qの斜面をすべり，水平面に到達した。糸を切った瞬間の台Qの速度を V_0 とする。球Pが水平面に到達した直後の球Pの速度 v_1 と台Qの速度 V_1 は，m，M，g，h，V_0 のうち必要なものを用いると，$v_1=\boxed{キ}$，$V_1=\boxed{ク}$ と表せる。

(3)　(2)の状態から，球Pは台Qの水平面を右方に移動し，ばねに到達してばねを縮ませた。ばねが最も縮んだ瞬間の球Pの速度を v_2，台Qの速度を V_2，ばねの自然の長さからの縮みを X とすると，m，M，g，h，k，V_0 のうち必要なものを用いて，$v_2=\boxed{ケ}$，$V_2=\boxed{コ}$，$X=\boxed{サ}$ と表せる。なお，ばねは十分長く，縮みきることはないものとする。

(4)　(3)の状態の後，球Pはばねから押しもどされる。球Pがばねから離れた直後の球Pの速度 v_3 は，m，M，g，h，k，V_0 のうち必要なものを用いると，$v_3=\boxed{シ}$ と表せる。

(4)の状態で，ばねから押しもどされた球Pは台Qの水平面上において床に対して静止していた。このことから，(1)の状態で台Qを大きさ(カ)の力で引っ張り続けた時間 T と，(2)で糸を切った瞬間の台Qの速度 V_0 は，θ，m，M，g，h のうち必要なものを用いて，$T=\boxed{ス}$，$V_0=\boxed{セ}$ であったことがわかる。

問1　図2に，(2)で球Pが台Qの水平面上を移動し始めてから，(3)でばねに接触して押しもどされ，(4)で再び台Qの水平面上を移動し始めるまでの，(i)球Pの速度，(ii)台Qの速度，(iii)球Pと台Qの重心の速度について，それぞれの変化を表すグラフをかけ。なお，(4)で，ばねから押しもどされた球Pは台Qの水平面上において床に対して静止していたとし，また，$M=3m$ とする。球Pがばねに到達した時刻を t_1，ばねの縮みが最大となった時刻を t_2，球Pがばねから離れた時刻を t_3 とし，それぞれの時刻における球P，台Q，球Pと台Qの重心の速度の値をそれぞれ記入すること。図2に示すように球Pを実線で，台Qを破線で，球Pと台Qの重心を一点鎖線でかくこと。曲線部分は厳密でなくてもよいが，上に凸か下に凸かはわかるようにかくこと。

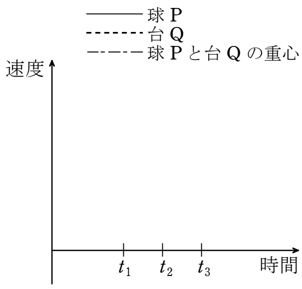
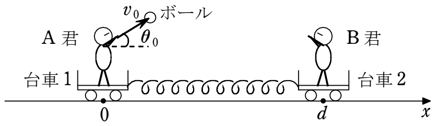


図2

6 [2003 東京工業大]

図のように，水平な地面に固定されたなめらかで直線状のレールの上に台車2台(台車1，台車2)が置かれ，それぞれにA君，B君が乗っている。A君と台車1の質量の和は，B君と台車2の質量の和と等しく，Mである。ここでは簡単のため，A君，B君の身体の大きさ，および，2台の台車の大きさはすべて無視し，点とみなせるものとする。また，台車1と台車2の間は質量が無視できるゴムひもでつながれている。このゴムひもは自然長がLで，復元力の比例係数(ばね定数)がkである。図のようにレールにそってx軸をとる。最初，台車1は座標$x=0$に，台車2は座標$x=d$にともに静止していた。以下，台車の速度を答える問題では符号を含めて答えること。また，重力加速度の大きさはgとし，空気の抵抗は無視するものとする。



〔A〕 まず，ゴムひもはたるんでいて台車の運動に影響しないとする。

(1) A君が，地面に置いてあった質量mの，大きさの無視できるボールをそっと拾い上げ，それをB君に向かって投げた。ボールは地面に静止している人から見て速さv_0，仰角θ_0で飛び出した。このボールをB君はノーバウンドで受け取ることができた。このとき，距離dをv_0，θ_0，gを用いて表せ。

(2) A君がボールを投げた直後の台車1の速度v_1，B君がボールを受け取った直後の台車2の速度v_2をそれぞれv_0，θ_0，M，mを用いて表せ。

〔B〕 B君は，この後，台車2の運動に影響を与えないようにボールをそっと捨てた。ここで，全体(A君，B君，および2台の台車)を1つの物体とみなしたとき，重心は常に台車1と台車2の中点にあり，この重心の速度v_gは$v_g=\dfrac{1}{2}(v_1+v_2)$で表される。重心から見ると，台車1，台車2はそれぞれ同じ速さで反対方向に動いているように見える。

(3) ひきつづき，ゴムひもがたるんでいるとき，重心に対する台車1の相対速度v_1'を求めよ。ここでは，求めるべき量を，導出過程においてはまずv_1，v_2を用いて表し，最終的にはv_0，θ_0，M，mを用いて表すこと。

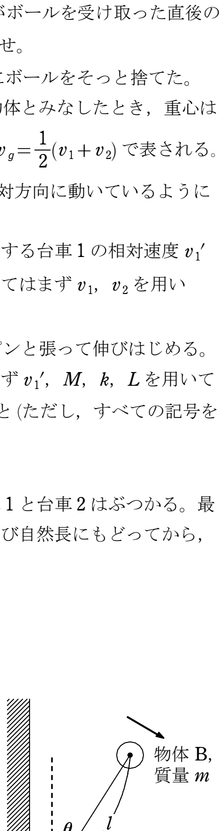
〔C〕 その後，2台の台車間の距離がLに達し，ゴムひもはピンと張って伸びはじめる。以下の問いでは，求めるべき量を，導出過程においてはまずv_1'，M，k，Lを用いて表し，最終的にはv_0，θ_0，M，m，k，Lを用いて表すこと(ただし，すべての記号を用いるとは限らない)。

(4) ゴムひもの最大の伸びlを求めよ。

(5) 最大に伸びた後，ゴムひもは縮みはじめ，やがて台車1と台車2はぶつかる。最大に伸びたときから自然長にもどるまでの時間t_1，および自然長にもどってから，台車どうしがぶつかるまでの時間t_2を求めよ。

7 [2011 東京大]

図のように，長さlで質量の無視できる棒によってつながれた，質量Mの物体Aと質量mの物体Bの運動を考える。ただし$M>m$とする。棒は物体Aおよび物体Bに対してなめらかに回転でき，棒が鉛直方向となす角をθとする。初め，物体Aは水平な床の上で鉛直な壁に接していた。一方，物体Bは物体Aの真上($\theta=0°$)から初速度0で右側へ動き始めた。その後の運動について次の問いに答えよ。なお，重力加速度の大きさをgとして，物体Aと物体Bの大きさは考えなくてよい。また，棒と物体Aおよび物体Bとの間にはたらく力は棒に平行である。



〔A〕 まず，物体Aと床との間に摩擦がない場合について考える。

(1) 物体Bが動きだしてからしばらくの間は，物体Aは壁に接したままであった。この間の物体Bの速さvを，θを含んだ式で表せ。

(2) (1)のとき，棒から物体Bにはたらく力Fを，θを含んだ式で表せ。棒が物体Bを押す向きを正とする。

(3) $\theta=\alpha$において，物体Aが壁から離れて床の上をすべり始めた。$\cos\alpha$を求めよ。

(4) $\theta=\alpha$における物体Bの運動量の水平成分Pを求めよ。

(5) 物体Bが物体Aの真横($\theta=90°$)にきたときの，物体Aの速さVを求めよ。Pを含んだ式で表してもよい。

(6) $\theta=90°$に達した直後に，物体Bが床と完全弾性衝突した。その後，物体Bがいちばん高く上がったとき$\theta=\beta$であった。$\cos\beta$を求めよ。Pを含んだ式で表してもよい。

〔B〕 次に，物体Aと床との間に摩擦がある場合について考える。今度は，$\theta=60°$において，物体Aが壁から離れた。物体Aと床との間の静止摩擦係数μを求めよ。

8 [2013 東京工業大]

〔A〕 図1のように水平でなめらかな平面があり，その上の直線上を同じ質量mの2つの物体AとBが，伸び縮みしない質量の無視できる長さlのひもで結ばれたまま，摩擦を受けずに運動している。以下では，図の右向きを速度の正の向きにとる。

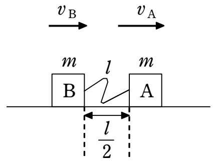


図1

時刻$t=0$において，図1のように物体Aは物体Bの右向きに距離$\dfrac{l}{2}$だけ離れた位置にあり，ひもはたるんだまま，物体AとBはそれぞれ速度v_A，v_B ($v_A>v_B>0$)で運動している。物体間の距離がlになるとひもがたるみなく張り，物体AとBには撃力がはたらく。その直後，物体AとBは近づき始め，やがて衝突する。ひもが張ったときの衝撃によってエネルギーが失われることはなく，ひもが張る前後で物体Aと物体Bの力学的エネルギーの和，および運動量の和が保存している。なお，ひもがたるんでいるときには，ひもは物体AとBの運動を妨げることはないとする。また，物体AとBの衝突は完全弾性衝突であるとする。空気抵抗は無視できるものとして，次の問いに答えよ。

(1) 初めてひもが張った直後の物体A，Bの速度をそれぞれv_A'，v_B'とする。ひもが張る前後のエネルギー保存の式，および運動量保存の式を記せ。また，v_A'，v_B'を求めよ。

(2) $t=0$から初めてひもが張るまでの時間T_0を求めよ。また，$t=0$から2回目にひもが張るまでの物体Bの速度を，時間の関数として図2に実線でかきこめ。ただし，初めてひもが張る時刻$t=T_0$と速度v_A，v_Bを表す位置は図2に示されている。

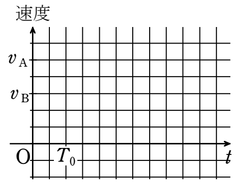


図2

〔B〕 図3のように水平面となす角がθ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$の斜面があり，その上の直線上を同じ質量$m$の2つの物体AとBが，伸び縮みしない質量の無視できる長さlのひもで結ばれたまま運動している。ただし，2つの物体は紙面内を運動し，斜面から離れることはない。物体Aの下面はなめらかで斜面との間に摩擦はないが，物体Bの下面はあらく，物体Bと斜面との間の動摩擦係数はμ'である。物体Bにはたらく動摩擦力は重力の斜面下向き成分に比べて小さく，物体は斜面上で静止することはない。以下では，斜面下方を速度の正の向きにとる。

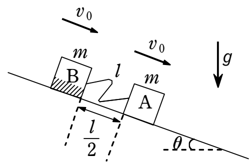


図3

時刻$t=0$において物体Aは物体Bより斜面にそって距離$\dfrac{l}{2}$だけ下方にあり，物体AとBの速度は等しく，v_0 (>0)であった。重力加速度の大きさをgとし，空気抵抗は無視できるものとして，次の問いに答えよ。

(3) $t=0$から初めてひもが張るまでの時間T_1を求めよ。

(4) 初めてひもが張った直後の，物体Bから見た物体Aの相対速度$\varDelta v$を求めよ。ただし，ひもが張ったときの衝撃によってエネルギーが失われることはなく，ひもが張る前後で物体Aと物体Bの力学的エネルギーの和，および運動量の和が保存している。なお，ひもが張る瞬間において，物体にはたらく重力と摩擦力の影響は無視する。

(5) 問(4)でひもが張った時刻から，物体A，Bが近づき，初めて距離が$\dfrac{l}{2}$になるまでの時間T_2を求めよ。また，距離が$\dfrac{l}{2}$になったときの物体Bから見た物体Aの相対速度$\varDelta V$を求めよ。

(6) $t=0$から3回目にひもが張るまでの物体A，Bの速度を，時間の関数として図4にかきこめ。物体Aの速度のグラフを実線，物体Bの速度のグラフを破線でかくこと。ただし，$t=0$から$t=T_1$までのグラフは図4にかきこまれている。

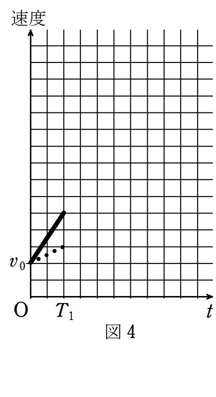
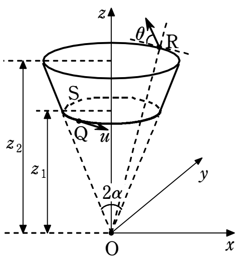


図4

9 ［2007 東京大］

図のように，曲面Sは2つの水平面によって切り取られた円錐側面の一部である。この面の内側にそって運動する質量 m の質点を考える。円錐の頂角は 2α であり，円錐の軸は鉛直方向であるとする。頂点Oを原点にとり，水平面内に x 軸と y 軸を，鉛直上向きに z 軸をとる。Sの下端の z 座標は z_1，上端の z 座標は z_2 であり，その範囲を超えると質点は自由に運動できる。Sと質点の間の摩擦は無視できるとし，重力加速度の大きさを g として次の設問に答えよ。



［A］ 質点が $z=z_0\,(z_1<z_0<z_2)$ の水平面内を等速円運動している。水平面内の等速円運動の運動方程式と鉛直方向の運動方程式とをそれぞれ書け。ただし，等速円運動の角速度を ω，質点がSから受ける抗力の大きさを N とする。また，ここから ω と N を求めよ。

［B］ 質点が水平面内を運動していない場合であっても，質点にはたらく力のベクトルを考えると，その水平成分はつねに円錐の軸に向かっている。このため，質点を xy 平面に投影してできる点の運動について，太陽のまわりをまわる惑星の運動と同様に面積速度一定の法則が成りたつ。この性質を利用して，Sの下端の円上の点Qから速さ u で円周にそって打ち出された質点の運動を考える。

(1) 質点を xy 平面に投影してできる点の面積速度を求めよ。

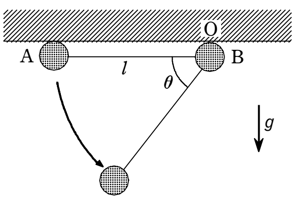
(2) 質点がSから外に飛び出すことなく運動し続けるためには u はどのような範囲になければならないかを答えよ。

(3) 速度が前問の条件を満たさず，図に示すように上端のある点Rから質点が飛び出すとする。飛び出す瞬間の速度ベクトルと，Rにおける円の接線がなす角を θ とする。速度ベクトルはRにおける円の接線と線分ORとを含む平面内にあることに注意して $\cos\theta$ を求めよ。

(4) 前問で上端から飛び出したあとに到達する最も高い点の z 座標を求めよ。

10 ［2015 東京大］

質量 m の小球A，Bが長さ l のひもの両端につながれている。図のように水平な天井に小球A，Bを l だけ離して固定した。小球Bを固定した点をOとし，重力加速度の大きさを g とする。小球A，Bの大きさ，ひもの質量，および空気抵抗はないものとする。



［A］ 小球Bを固定したまま小球Aを静かにはなした。

(1) ひもと天井がなす角度を θ とする。小球Aの速さを θ を用いて表せ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2) 小球Aが最下点 $\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)$ に達したときのひもの張力の大きさを求めよ。

(3) 小球Aが最下点 $\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)$ に達したときの小球Aの加速度の大きさと向きを求めよ。

［B］ 小球Aが初めて最下点 $\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}\right)$ に達したときに小球Bを静かにはなした。この時刻を $t=0$ とする。

(1) 2個の小球の重心をGとする。小球Bをはなした後の重心Gの加速度の大きさと向きを求めよ。

(2) 時刻 $t=0$ における，重心Gに対する小球A，Bの相対速度の大きさと向きをそれぞれ求めよ。

(3) 時刻 $t=0$ における，ひもの張力の大きさを求めよ。

(4) 時刻 $t=0$ における，小球A，Bの加速度の大きさと向きをそれぞれ求めよ。

(5) 小球Bをはなしてから，初めて小球Aと小球Bの高さが等しくなる時刻を求めよ。

(6) 小球Bをはなした後の時刻 t における小球Aの水平位置を求めよ。ただし，点Oを原点とし，右向きを正とする。

11 ［2017 東京工業大］

円筒状の容器に満たした密度 ρ の液体があり，その中での円柱の運動を考える。この円柱は底面積 S，高さ L，密度 $\dfrac{2}{3}\rho$ である。以下では，円柱の底面は常に液面と平行であるとし，円柱が容器にぶつかることはないとする。また，円柱が動く際の液体の抵抗は無視する。液体中で円柱が運動するときも液面は常に水平であるとし，浮力についてはアルキメデスの原理が常に成りたつとする。周囲の空気による浮力や空気抵抗は無視する。重力加速度の大きさを g とする。

［A］ 円柱を液体中に入れたところ，この円柱は図1のように浮かんで静止した。容器の底面積は S に比べて十分大きく，円柱が運動することによる液面の変化は L に比べて無視できるものとする。

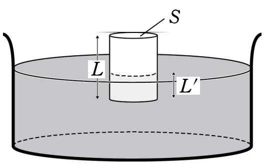


図1

(1) 円柱のうち液面下にある部分の高さ L' を求めよ。なお，図は模式図であり，L' の長さは正確ではない。

(2) 円柱を鉛直上向きに少し持ち上げてから手をはなしたところ，この円柱は鉛直方向に単振動をした。円柱に関する運動方程式を立てることにより，その周期 T を求め，ρ，S，L，g のうち必要なものを用いて表せ。ただし，単振動の間に円柱が液体から離れることはないとする。

［B］ ［A］と同様に底面積の十分大きな容器を考え，円柱 $\left(\text{底面積 } S,\ \text{高さ } L,\ \text{密度 } \dfrac{2}{3}\rho\right)$ を，密度 ρ の液体中に入れる。円柱の底面が液面に平行なまま，その下面が液面より $\dfrac{5}{3}L$ だけ下の位置になるまで手で沈める（図2(i)）。そして円柱から静かに手をはなす。次の問いに答えよ。なお，ここでは［A］と同様，容器の底面積は S に比べて十分大きく，円柱が運動する間の液面の変化は L に比べて無視できるものとする。

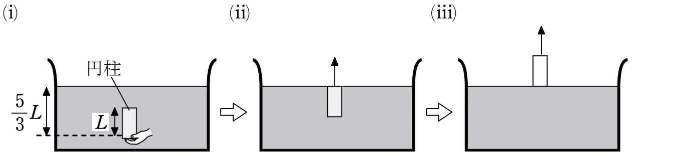


図2

(3) 円柱全体が完全に液体中にある間の円柱の運動の加速度を求めよ。ただし，上向きを正の向きとする。

(4) 円柱の上面が液面に到達したとき（図2(ii)）の円柱の速さを求めよ。

(5) 円柱の上面が液面に到達した後も円柱は上昇を続け，やがて円柱の下面が液面に到達した（図2(iii)）。そのときの円柱の速さを求めよ。

［C］ 次に［A］［B］での設定から容器の底面積のみ変更し，図3のように容器の底面積が $2S$ であるとする。この場合は，円柱 $\left(\text{底面積 } S,\ \text{高さ } L,\ \text{密度 } \dfrac{2}{3}\rho\right)$ が上昇・下降するときの液面の変化も考慮する必要がある。次の問いに答えよ。

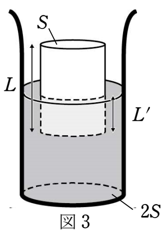


図3

(6) まず，円柱をつりあいの位置に静止させたところ，液面下にある部分の高さは［A］と同様に L' となった。次にこの円柱の上面の中心に質量が無視できる糸をつけて，円柱をつりあいの位置から鉛直にゆっくりと持ち上げていく。円柱がつりあいの位置から x だけ上昇したときの糸の張力の大きさを，x，ρ，S，L，g のうち必要なものを用いて表せ。ただし，$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}L'$ とする。

(7) 円柱の上昇とともに液面が低下するので，つりあいの位置からちょうど $\dfrac{1}{2}L'$ だけ持ち上げると円柱の下面が液面に一致する。この間に外部からした仕事 W を ρ，S，L，g のうち必要なものを用いて表せ。

(8) (7)において，円柱がもつ重力による位置エネルギーの変化 $\varDelta E_1$ を，ρ，S，L，g のうち必要なものを用いて表せ。増加する場合を正とする。

(9) (7)において，液体がもつ重力による位置エネルギーの変化 $\varDelta E_2$ を，ρ，S，L，g のうち必要なものを用いて表せ。増加する場合を正とする。

$\boxed{12}$［2013 京都大］

次の文章を読んで，$\boxed{}$ に適した式を記入せよ。また，**問 1**，**問 2** では，指示に従って，解答せよ。

以下の設問では，地球は半径 R の球であり，密度は一様に分布していると考えてよい。また，地球の質量を M，万有引力定数を G とし，地球の自転の影響，摩擦，および空気の抵抗はないものとする。

(1)　図 1 のように，地球の中心 O を通って直線状に掘られたトンネルを考える。トンネルは十分に細く，トンネルを掘ったことによる質量の変化は無視できるものとする。トンネル内の任意の 1 点 P(OP$=r$) で質量 m の質点にはたらく重力は，O を中心とした半径 r の球の質量が中心 O に集まったとして，それと質点との間の万有引力に等しく，半径 r の球の外側の部分は，この点での重力には無関係であることが知られている。したがって，トンネル内の 1 点 P において質点にはたらく重力の大きさは，m，M，R，r，G を使って $\boxed{\text{ア}}$ と表すことができる。この力による質点の運動は単振動であり，その周期は $\boxed{\text{イ}}$ で与えられる。

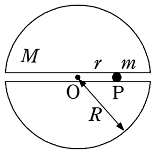


図 1

(2)　次に，図 2 のように，トンネルを通る直線にそって，地表からの高さが h の点に質量 μ の質点 A を静かに置き，静止した状態からトンネルに落下させ，中心 O に静止している質量 m の質点 B に衝突させる。質点 A がトンネルに入る瞬間の速さは $\boxed{\text{ウ}}$ で，中心 O に到達する直前の速さは $\boxed{\text{エ}}$ である。衝突は弾性衝突であるとすると，衝突直後の質点 A の速さは $\boxed{\text{オ}}$，質点 B の速さは $\boxed{\text{カ}}$ となる。衝突後，質点 B は反対側の地表に達した。

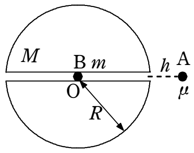


図 2

問 1　$h=0$ とした場合に，この後質点 B が無限の遠方に飛びさるために必要な $\dfrac{\mu}{m}$ の値の範囲を求めよ。

(3)　今度は，図 3 のように，地球の中心 O から $\dfrac{R}{2}$ だけ離れたところを通る直線状の細いトンネルを掘った。中心 O からの距離が r で，トンネルの中心 O′ から x だけ離れたトンネル内の点 P にある質量 m の質点にはたらく重力の大きさは $\boxed{\text{ア}}$ なので，その質点にはたらくトンネルにそった方向の力の大きさは，m，M，R，x，G を使って $\boxed{\text{キ}}$ で与えられる，したがって，地表で静止した状態からトンネルを通って反対側の地表に出るまでにかかる時間は $\boxed{\text{ク}}$ である。

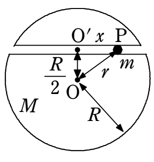


図 3

(4)　次に，図 4 のように，質量 μ の質点 A をトンネルの端点に静かに置き，静止した状態からトンネルに落とし，トンネルの中心 O′ に静止している質量 m の質点 B に衝突させた。衝突は弾性衝突であるとすると，質点 B が反対側の地表に達するための条件は $\mu \geqq \boxed{\text{ケ}}$ で与えられる。また，質点 B が地表から飛びだした後，再び地表にもどってくるための条件は $\mu < \boxed{\text{コ}}$ となる。

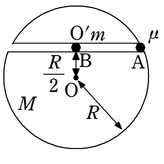


図 4

問 2　地表から飛びだした瞬間の質点 B の運動エネルギーが，そのときの位置エネルギーの大きさ $\dfrac{GMm}{R}$ の半分である場合を考える。地表を飛びだした後の質点 B の運動では，面積速度が一定となる。質点 B が地球から最も離れた地点に達したときの中心 O からの距離を求めよ。

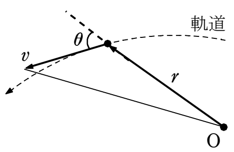
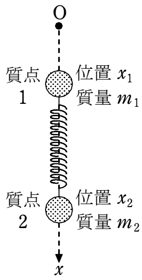


図 5

なお，図 5 のように質点が地球の中心 O から距離 r の位置を速さ v で運動している場合，その面積速度は $\dfrac{1}{2}rv\sin\theta$ で与えられる。ただし，θ は地球の中心 O から軌道上の質点に向かう方向と速度のなす角度である。

$\boxed{13}$［2016 早稲田大］

図に示すように，原点 O から鉛直下向きを正にとった x 軸上でばねでつながれている 2 つの質点 1，2 の運動を考えよう。質点 1，2 の質量をそれぞれ m_1，m_2，位置座標を x_1，x_2 とする。ばねの自然の長さは l，ばね定数は k で，ばねの質量は無視できる。重力加速度の大きさを g とし，空気抵抗は無視できるものとする。



この系の重心の位置座標は $X=\dfrac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$ で与えられる。微小な時間差 $\varDelta t$ だけ離れた 2 つの時刻 t，$t'=t+\varDelta t$ における重心の位置座標をそれぞれ X，$X'=X+\varDelta X$ とすると，重心の速度 V は，$V=\dfrac{\varDelta X}{\varDelta t}$ で与えられるので，質点 1，2 の速度をそれぞれ v_1，v_2 と表すと，$V=\dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$ と表せることがわかる。

(1)　上の考えをもう一歩進めて，重心の加速度 A を質点 1，2 の加速度 a_1，a_2 を含む式で表せ。

この系を用いて 2 つの実験をした。最初の実験では，質点 1 を位置 x_1 $(\geqq 0)$ に固定したまま質点 2 をつり下げたら，ばねが少し伸びてつりあった。この位置からさらに質点 2 を下方に h だけ下げてから，時刻 $t=0$ で静かに手をはなした。

(2)　質点 2 の運動方程式を書け。さらに質点 2 の振動の中心座標，振幅，周期 T を求めよ。

(3)　質点 2 の運動のようすを時刻 $t=0$ から 1 周期分について図示し，さらに時刻 t における質点 2 の位置座標 x_2 を数式を用いて表現せよ。

次の実験では，まず質点 1 を原点 O に固定し，すべてが静止した後に質点 1 の固定を外した。この時刻をあらためて $t=0$ とする。

(4)　$t\geqq 0$ における質点 1，2 それぞれの運動方程式を書け。

(5)　(4) で求めた運動方程式から重心の加速度 A を求めよ。

(6)　(5) の結果を用いて，時刻 t における重心の位置 X を求めよ。

(7)　(4) の運動方程式を用いて，質点 1 から見た質点 2 の加速度，すなわち相対加速度 $a=a_2-a_1$ を求めよ。

(8)　(7) の結果は，$\xi=x_2-x_1$ で定義される相対座標 ξ に対する運動の式と見ることができる。この式は，自然の長さ l，ばね定数 k のばねの先に，ある質量 μ のおもりをつけたときの単振動の式になる。この質量 μ を m_1，m_2 を用いて表せ。

(9)　時刻 t における相対座標 ξ を求め，(8) の μ を含む式で表せ。

(10)　2 つの質点が n 回目 ($n=1$，2，3，…) に最接近する時刻 t_n を (8) の μ を含む式で表せ。また，時刻 t_n における重心の位置 X_n を t_n を含む式で表現せよ。

(11)　(10) の結果を用いて，時刻 t_n における質点 1，2 の力学的エネルギーの総和 E を求めよ。ただし，重力による位置エネルギーの基準は原点 O にとるものとする。

(12)　10 回目に最接近した瞬間に，質点 2 が水平な床と完全弾性衝突をして上方に飛び上がった。重心のその後の運動について正しい記述を 1 つだけ選び，その番号を記せ。また，その理由を述べよ。

①　$t=0$ における重心の位置まで上昇し，再び落下を始める。
②　$t=0$ における重心の位置より低い点まで上昇し，再び落下を始める。
③　$t=0$ における重心の位置より高い点まで上昇し，再び落下を始める。
④　条件次第で上の ①，②，③ のいずれも起こりうるので，1 つの運動形態にしぼることはできない。