

1 [2004 早稲田大]

入射してくる平面波が固定された質点に衝突すると、ホイヘンスの原理により球面波が発生する。この現象を波の散乱という。発生した球面波(散乱波)に関連して以下の問いに答えよ。

1つの質点が原点にある場合を考えよう。

- (1) 入射する波は x 軸に正の向きに進む縦波とし、位置 x 、時刻 t での波の変位が

$$f(x, y) = A \sin(kx - \omega t) \quad \dots\dots ①$$

で与えられるものとする。また、変位は y 座標、 z 座標には依存しないものとし、 A 、 k 、 ω は定数とする。このとき、この波の波長を λ を用いて表せ。

- (2) ①式で与えられる波の山や谷の進む速さ(位相速度)を k と ω を用いて表せ。

- (3) 散乱波の変位が、質点から十分遠方で

$$f_1(r, t) = \frac{B}{r} \sin(kr - \omega t) \quad \dots\dots ②$$

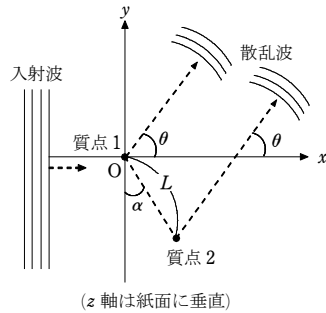
と表されるものとする。②式において、 r は原点からの距離を表し、

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ と与えられる(座標を (x, y, z) とする)。また、 B は散乱の強さを表す定数である。単位面積を単位時間に通過する波のエネルギーは、波の変位の2乗に比例する。その比例定数を C とするとき、半径 r の球面を通過する波の、1周期にわたる平均エネルギー $P(r)$ は次のように求められる。ただし、上線は波の1周期にわたる平均を意味するものとする。空欄に入る表式を計算せよ。

$$P(r) = 4\pi r^2 C [f_1(r, t)]^2 = \square$$

次に散乱する質点が2つある場合を考えよう。

- (4) 質点の1つ(質点1)は前問までと同様に原点にあり、もう1つ(質点2)は xy 平面内の図に示した位置にあるものとする。入射する波は、変位が①式で与えられる縦波とする。入射平面波は各質点により前問のように散乱され、たがいに干渉しあいながらひろがっていく。図のように x 軸から測った角度が θ で xy 平面内を進む散乱波の部分について考えよう。それぞれの質点から散乱された波の経路差 D を L 、 α 、 θ のみを用いて表せ。



- (5) 質点2により前問と同じ方向に散乱された波の変位は、2つの質点から十分離れたところで

$$f_2(r, \theta, t) = \frac{B}{r} \sin[k(r+D) - \omega t]$$

と表される。このとき、2つの散乱波が重なりあった波(合成波)の変位 f_{1+2} は以下のように表される。空欄にあてはまる表式を D を用いて求めよ。

$$f_{1+2}(r, \theta, t) = f_1(r, t) + f_2(r, \theta, t) = 2 \frac{B}{r} \sin \left\{ k \left(r + \frac{D}{2} \right) - \omega t \right\} \times \square$$

- (6) 前問で得られた合成波が、半径 r の球面上の単位面積を単位時間に通過する際の、波の1周期にわたる平均エネルギー $p(r, \theta)$ は、(3)の比例定数 C を用いて以下のように表される。空欄にあてはまる表式を D を用いて求めよ。

$$p(r, \theta) = C [f_{1+2}(r, \theta, t)]^2 = \frac{CB^2}{2r^2} \times \square$$

最後に、 $\alpha = 0$ として、平均エネルギーの L に対する依存性を考えてみよう。

- (7) 入射波の k を固定し、 L を小さくしていくと、 $p(r, \theta)$ はどのような値に近づくだろうか。以下の空欄にあてはまる値をかけ。

$$p(r, \theta) = \frac{CB^2}{2r^2} \times \square$$

- (8) 前問とは逆に、入射波の k を固定し、 L を大きくしていく場合を考えよう。このとき、 $p(r, \theta)$ の θ についての平均値 $p_{\text{平均}}(r)$ がどういった値に近づくかを考え、以下の表式の空欄にあてはまる値を求めよ。

$$p_{\text{平均}}(r) = \frac{CB^2}{2r^2} \times \square$$

(ヒント: $a \rightarrow \infty$ のとき $(\cos(asin \theta))_{\text{平均}} \rightarrow 0$ を用いてよい。)

2 [2013 東京大]

次の[A]、[B]、[C]の各問いに答えよ。なお、角度の単位はラジアンとする。

- [A] 図1のように、超音波発振器を用いて平面波に近い超音波を板Aに入射する(板中の直線は波面を表す)。振動数を変化させながら縦波の超音波を板面に垂直に入射したところ、振動数が f_0 の整数倍になるごとに板が共振した。板Aの厚さを h_A 、板A内を伝わる縦波の超音波の速さを V_A とする。また、板の両面は自由端とする。

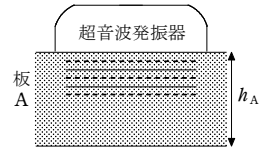


図1

- (1) f_0 を h_A 、 V_A を用いて表せ。
 (2) $V_A = 5.0 \times 10^3$ m/s のとき、振動数 2.0×10^6 Hz と 3.0×10^6 Hz の両方で共振が起こった。 h_A の最小値を求めよ。

- [B] 固体中では縦波と横波の両方が存在する。縦波と横波は速さが異なり、縦波のほうが k 倍 ($k > 1$) 速い。図2のように板Aと、それとは材質の異なる板Bを貼り合わせ、2層構造をもつ板を作製した。板B内を伝わる縦波の速さを V_B とし、 $\frac{V_B}{k} > V_A$ とする。また、 k の値は物質の種類によらないとする。

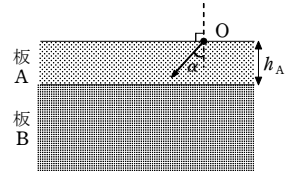


図2

- 板Aの表面上の点Oから、図2のように板A内を角度 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) で伝わる縦波を入射した。すると、境界面で縦波の反射波、屈折波のみならず、横波の反射波と屈折波も発生した。反射角は、縦波と横波についてそれぞれ θ と θ' であった。屈折角は、縦波と横波についてそれぞれ ϕ と ϕ' であった。

- (1) 縦波の反射角 θ が入射角 α と等しくなることをホイヘンスの原理に基づいて考える。図3中の記号P、Q、R、Sを用いて、 \square を埋めよ。

図3において、PQに平行な波面をもつ入射波が速さ V_A で進んでいる。波面上の2点P、Qを通過してから時間 T 後、Qを通過した側が境界上の点Sに達したとする。このとき、Pから発せられた素元波が時間 T 後になす半円に対してSから引いた接線RSが反射波の波面となる。

$\triangle PQS$ と $\triangle SRP$ において、 $\angle PQS = \angle SRP = \frac{\pi}{2}$ 、 \square ア = \square イ = $V_A T$ 、 $PS = SP$ (共通) であるから $\triangle PQS$ と $\triangle SRP$ は合同である。また、 $\triangle PQS$ は $\angle PQS$ を直角とする直角三角形であるから、 $\alpha = \angle$ ウ \square 。同様に、 $\triangle SRP$ は $\angle SRP$ を直角とする直角三角形であるから、 $\theta = \angle$ エ \square 。ゆえに、 $\alpha = \theta$ である。

- (2) 横波の反射角 θ' について、 $\sin \theta'$ を求めよ。
 (3) 縦波の屈折角 ϕ 、横波の屈折角 ϕ' について、 $\sin \phi$ と $\sin \phi'$ を求めよ。

- [C] [B]で作製した2層構造をもつ板の境界面から深さ h の位置に異物Xが存在している。図4のように、Oより超音波を入射してから異物表面での反射波がOにもどってくるまでの時間を t とする。 t の測定値から h を求める方法を考えよう。

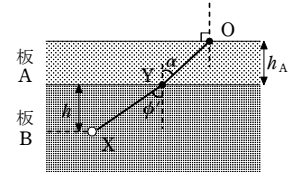


図4

- (1) まず、入射角 α を調整し、板B中を伝わる屈折波が横波だけとなるようにしたい。 $\sin \alpha$ の満たすべき条件を求めよ。
 (2) (1)の条件を満たす入射角 α でOから縦波を入射したところ、境界上の点Yで横波が屈折角 ϕ' で板B中に入射しXに到達した。その後、同じ経路をたどって反射波がOにもどってきた。 t を k 、 h 、 h_A 、 V_A 、 V_B 、 α 、 ϕ' を用いて表せ。ただしXの大きさは無視せよ。

3 [2010 東京大]

管の中では気柱の共鳴という現象が起こるが、そのときの振動数を固有振動数とよぶ。なお、以下で用いる管は細いので、開口端補正は無視する。

[A] 管の長さを L 、空気中の音の速さを V として次の問いに答えよ。

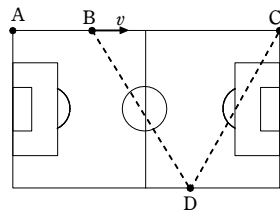
- (1) 管の両端が開いているときの固有振動数のうち、小さいほうから3番目までの振動数を求めよ。
- (2) 管の一端が開いていて、他端が閉じられているときの固有振動数のうち、小さいほうから3番目までの振動数を求めよ。

[B] 長さ 1 m の透明で細長い管の左端に膜をはり、この膜を外部からの電流によって微小に振動させ、管の中に任意の振動数の音波を発生できるようにした。管は水平に置かれ、内部には細かなコルクの粉が少量まかれていて、空気振動のようすが見えるようになっている。管の右端をふたで閉じ、音波の振動数をゆっくり変化させた。振動数を 400 Hz から 700 Hz まで変化させたとき、 519 Hz と 692 Hz で共鳴が起こり、空気振動の腹と節がコルクの粉の分布ではっきりと見えた。なお、他の振動数では共鳴は起こっていない。

- (1) 692 Hz での共鳴のときの空気振動の節の位置を管の右端からの距離で答えよ。
- (2) この条件を用いて、音の速さ V を求めよ。

[C] 次に、[B]で行った実験では閉じられていた右端を開いて、振動数を 400 Hz から 700 Hz まで変化させた。今度は振動数が f_1 と f_2 で共鳴が起こり、管は大きな音で鳴った。ここで、 $f_1 < f_2$ である。 f_1 と f_2 を求めよ。

[D] この装置を自転車にのせてサッカー場に行った。固有振動数 f_1 の音を出しながら、図に示すように、サイドライン上を点 A から点 C に向かって一定の速さ v で走る。点 C にはマイクروفオンと増幅器とスピーカーがあり、マイクروفオンでとらえた音を増幅してスピーカーで鳴らす。三角形 BCD が正三角形になるように、サイドライン上に点 B と点 D を設定する。点 D で装置からの音とスピーカーからの音を聞く。風の影響は無視して次の問いに答えよ。

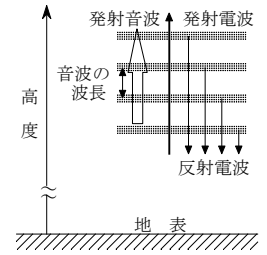


- (1) 2つの音源からの音は、干渉によりうなりを生じる。点 B からの音とスピーカーからの音が干渉して生じるうなりの振動数を、音の速さ V 、自転車の速さ v 、振動数 f_1 を用いて表せ。
- (2) 自転車が点 B を通過するときのうなりの振動数は 2 Hz であった。この値を用いて自転車の速さを有効数字1桁で求めよ。なお、音の速さの値は[B]で求めたものを用いよ。

4 [2002 京都大]

次の文を読んで、文中の□に適した式または数値を記入せよ。□はすでに□で与えられたものと同じものを表す。なお、微小量 x ($|x| \ll 1$) および実数 a に対して成り立つ近似式 $(1+x)^a \approx 1+ax$ を用いよ。

音波と電波の両方を同時に用いると、以下のようにしていろいろな高度での音の速さを測定することができ、測定された音の速さから大気中の温度の高度分布を知ることができる。ここで音の速さを v_s で表し、電波の速さを真空中の光の速さ c ($=3.00 \times 10^8\text{ m/s}$) と等しいとする。音の速さ v_s は光の速さ c より十分小さいので $\frac{v_s}{c}$ は微小量であることに留意せよ。



大気は通常では電波を反射しない。しかし、図に示すように音波を放射して大気の密度の増減を引き起こすと、電波を反射する面が音波の波長に等しい間隔でいく重にも現れ、地上から発した電波の一部は、これらの面で反射して再び地上に戻ってくる。この反射面の間隔は音波の振動数を f_s とすると□である。

図に示すように、地上から垂直に上空に向け、振動数 f_s の音波を短時間発した。音波を放射して時間 t_1 後に、音波と同じ方向に、やはり短い時間だけ電波を放射したところ、電波を放射して時間 t_2 後に地上に戻ってきた電波が観測された。このことから反射が生じた高度は $h = \square$ であることがわかる。

電波に対しても音波など一般の波と同じようにドップラー効果を考えることができ、観測者および波源の動く速さが光の速さより十分に小さいときには、ドップラー効果の関係式は音波の場合と同じになる。よって、音の速さ v_s で上昇する仮想的な観測者には電波の振動数は放射した電波の振動数 f からずれてみえ、 $f - \Delta f_1$ と表される。ここで、振動数のずれ Δf_1 は□となる。したがって、反射してきた電波を地上で測定すると、その振動数は $f - \Delta f_2$ と表すことができる。ここで、振動数のずれ Δf_2 は□となり、これより高度 h における音の速さを知ることができる。

このような観測では地上に戻る電波が強いことが望ましい。そこで放射する電波の振動数 f を変えてくり返し放射し、反射してくる電波の強度を観測した。その結果、電波の強度は振動数 f とともに大きく変化し、 $f = f_0$ のとき最大になった。その理由を考えてみよう。電波の速さは音の速さ v_s で上昇する観測者に対しても光の速さ c に等しいので、振動数 f で放射した電波に対して、この観測者が見る波長は $\lambda = \square$ となる。したがって、異なった反射面で反射される波が互いに強めあう条件は、自然数 n を用いて $\lambda = \square$ となる。この関係式において $n=1$ とおくと、音の速さは電波の振動数 f_0 を用いて $v_s = \square$ と表すことができる。ただし、 $\frac{f_s}{f_0}$ は微小量なので $\left(\frac{f_s}{f_0}\right)^2$ を含む項は無視せよ。

音の速さは高度とともに変化する大気圧には直接依存せず、大気を構成している分子の速さの平均(二乗平均速度)で近似的に与えられることがわかっているため、音の速さは絶対温度 T の□乗に比例することになる。したがって、いろいろな高度で音の速さを測定すれば、それぞれの高度における大気中の温度を知ることができる。たとえばある観測の結果、 $\frac{\Delta f_2}{f} = 2.00 \times 10^{-6}$ であったとすると、 Δf_2 が□で与えられることを用いて、電波が反射された高度での音の速さは□ m/s、温度は□ °C となる。それぞれ有効数字3桁および2桁で答えよ。ここで、音の速さは -3 °C において 330 m/s であるとして計算せよ。

5 [2014 早稲田大]

図1のように、頂角が θ 、空気に対する相対屈折率 $n (>1)$ のプリズムに対して、空気中で波長 λ 、速さ c の単色光を(a)斜面OAに垂直に入射した場合と(b)底面OBに垂直な向きで斜面OAに入射した場合を考える。ただし、すべての角度の単位はradとする。問の指示にしたがって解答する際、必要に応じて公式

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y \quad (\text{複号同順})$$

を用いよ。

- プリズム中の光の波長、振動数、速さを求めよ。 n, λ, c を用いて解答せよ。
- (a)の場合、OB面から空気中への屈折角 r_1 について $\sin r_1$ を n と $\sin \theta$ を用いて表せ。
- (b)の場合、OB面から空気中への屈折角 r_2 について $\sin r_2$ を n と $\sin \theta$ を用いて表せ。
- (a)の場合、プリズムのOB面で反射し、OA面を角度 r_3 で空気中に屈折する光がある。 $\sin r_3$ を n と $\sin \theta$ を用いて表せ。
- (a)の場合、(2)と(4)で扱ったプリズムから空気中への屈折では全反射が起こりうる。

θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲に限ったとき、(2)のOB面では全反射が起こらず、しかも(4)の

OA面で全反射が起こるには、屈折率 n の逆数は $\frac{1}{n} > \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n}$ の範囲に限られる。この2つの□に入る式を $\sin \theta$ を用いて表せ。

- 単色光でなく、スリットを通した白色可視光を(b)と同様底面OBに垂直な向きで斜面OAに入射させたと、OB面から屈折して出ていく光が虹のように連続的に色の異なる模様となった。光の色は振動数によって異なる。観察の結果では、屈折光の進む方向とその振動数は図2のようにになった。この結果からわかることは、プリズムの相対屈折率 n は光の波長 λ に対して一定ではなく、 λ が大きくなるほど□ウ。

この□ウに入る語句を答えよ。

- 次に、図3のように絶対屈折率 n_1 の物質中にある薄いきさび形(頂角 α)の領域を絶対屈折率 n_2 の別の物質で満たす。ただし、 $n_2 > n_1$ とする。真空中で波長 λ_0 の単色光を底面OD面に垂直な向きで斜面OCに入射させる。 α が十分小さく、OC面で反射する光も、くさび形領域に屈折する光もOD面に垂直に進むものとしてよい(図4)。

- 上方から入射する光が、OC面で反射する場合とくさび形領域に進みOD面で反射する場合、それぞれ反射に際して位相はどう変化するか答えよ。
- 単色光を当て続け真上から見ると、Oからの距離 x に応じて、明線と暗線が交互に見られた。明線と隣の明線との間隔 Δx を求めよ。ただし、 α が十分小さいので、近似式 $\cos \alpha \approx 1, \sin \alpha \approx \alpha, \tan \alpha \approx \alpha$ を用いて三角関数のない式で答えよ。

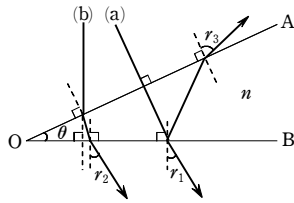


図1

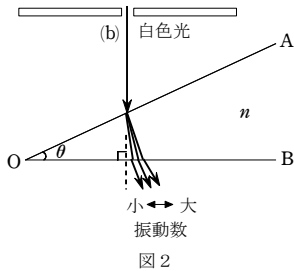


図2

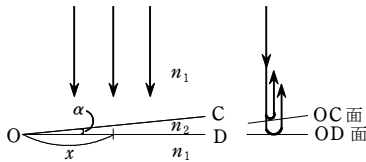


図3

図4

6 [2015 早稲田大]

図1のように、スリット S_1, S_2 をもつ不透明な板から距離 L 離れた所に、板と平行にスクリーンが置かれている。波長 λ の単色光の平面波をスリット S_1, S_2 に垂直に入射させると、スクリーン上に明暗の縞が生じ、ほぼ等間隔に明線が観測された。 S_1, S_2 の中点を通り板に垂直な直線がスクリーンと交わる点を点Oとする。 S_1 と S_2 の間隔を d とする。スクリーン上に x 軸をとり、点O

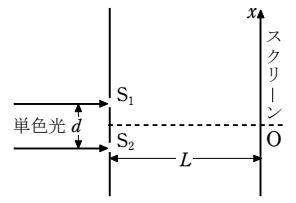


図1

を原点として、図の上向きを正とし、明線の位置を x で表す。ただし、 L は d や $|x|$ に比べて十分大きいとする。なお、 $|h|$ が1に比べて十分小さいときに成立する近似式

$$\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$$

- 上記の実験を屈折率1.0の空気中で行った。スクリーン上の隣りあう明線の間隔について、次の中から最もふさわしいものを1つ選べ。

- ① $\frac{L\lambda}{2d}$ ② $\frac{d\lambda}{2L}$ ③ $\frac{dL}{2\lambda}$ ④ $\frac{L\lambda}{d}$ ⑤ $\frac{d\lambda}{L}$
 ⑥ $\frac{dL}{\lambda}$ ⑦ $\frac{2L\lambda}{d}$ ⑧ $\frac{2d\lambda}{L}$ ⑨ $\frac{2dL}{\lambda}$

- 板とスクリーンの間を屈折率 n の物質で満たして同様の実験を行ったとき、隣りあう明線の間隔について、次の中から最もふさわしいものを1つ選べ。

- ① $\frac{L\lambda}{2dn}$ ② $\frac{d\lambda}{2nL}$ ③ $\frac{dL}{2n\lambda}$ ④ $\frac{nL\lambda}{2d}$ ⑤ $\frac{dn\lambda}{2L}$ ⑥ $\frac{dnL}{2\lambda}$
 ⑦ $\frac{L\lambda}{dn}$ ⑧ $\frac{d\lambda}{Ln}$ ⑨ $\frac{dL}{n\lambda}$ ⑩ $\frac{nL\lambda}{d}$ ⑪ $\frac{dn\lambda}{L}$ ⑫ $\frac{dnL}{\lambda}$

再び屈折率1.0の空気中で実験を行った。図2

のように、スリット S_1 の前のみに屈折率 n 、厚さ t の透明板を置くと、スクリーン上の明線の位置が、透明板を置かない場合と比べてずれるのが観測された。

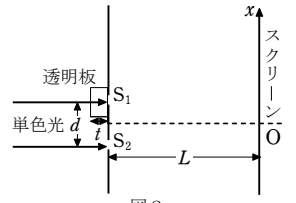


図2

- 透明板を置く前にスクリーン上の点Oの位置にあった明線は、透明板を置くと、スクリーン上を図の上下どちら側にずれるか。また、ずれの大きさを X としたときに、透明板の厚さ t はいくらか。明線の位置がずれる方向と透明板の厚さ t について、次の中から最もふさわしい組の選択肢を1つ選べ。

- ① 明線は上にずれる。 $t = \frac{dX}{(n-1)L}$ ② 明線は上にずれる。 $t = \frac{dL}{(n-1)X}$
 ③ 明線は上にずれる。 $t = \frac{LX}{(n-1)d}$ ④ 明線は上にずれる。 $t = \frac{(n-1)dX}{L}$
 ⑤ 明線は上にずれる。 $t = \frac{(n-1)dL}{X}$ ⑥ 明線は上にずれる。 $t = \frac{(n-1)LX}{d}$
 ⑦ 明線は下にずれる。 $t = \frac{dX}{(n-1)L}$ ⑧ 明線は下にずれる。 $t = \frac{dL}{(n-1)X}$
 ⑨ 明線は下にずれる。 $t = \frac{LX}{(n-1)d}$ ⑩ 明線は下にずれる。 $t = \frac{(n-1)dX}{L}$
 ⑪ 明線は下にずれる。 $t = \frac{(n-1)dL}{X}$ ⑫ 明線は下にずれる。 $t = \frac{(n-1)LX}{d}$

単色光(可視光線)の平面波を回折格子の面に垂直に入射させると、回折格子から十分遠方のスクリーン上に明暗の縞が観測された。図3は、ある明線の位置をPとしたときに点Pに到達する光線の様子をかいた図である。回折格子の格子定数(スリットの間隔)は d で、回折格子からスクリーンまでの距離 L は d に比べて十分大きいとする。

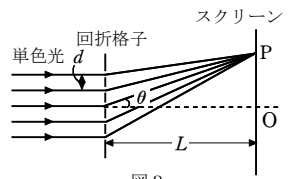


図3

このとき回折格子の各スリットを通してスクリーン上の点Pに向かう光はすべて平行とみなせる。これらの光が入射光の進行方向となす角を θ とする。空気の屈折率は1.0とする。

- 格子定数 $d = 5.0 \times 10^{-5} \text{ m}$ のとき、 $\theta = 2.0 \times 10^{-2} \text{ rad}$ の方向に明線が観測された。このときの光の波長について、次の中から最も近いものを1つ選べ。なお、可視光線の波長は約 $3.8 \times 10^{-7} \text{ m} \sim 7.7 \times 10^{-7} \text{ m}$ である。 $\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ という近似が使えるものとする。

- ① $4.0 \times 10^{-7} \text{ m}$ ② $4.2 \times 10^{-7} \text{ m}$ ③ $4.5 \times 10^{-7} \text{ m}$ ④ $5.0 \times 10^{-7} \text{ m}$
 ⑤ $5.2 \times 10^{-7} \text{ m}$ ⑥ $5.5 \times 10^{-7} \text{ m}$ ⑦ $6.0 \times 10^{-7} \text{ m}$ ⑧ $6.2 \times 10^{-7} \text{ m}$
 ⑨ $6.5 \times 10^{-7} \text{ m}$ ⑩ $7.0 \times 10^{-7} \text{ m}$ ⑪ $7.2 \times 10^{-7} \text{ m}$ ⑫ $7.5 \times 10^{-7} \text{ m}$