

1[2017 北海道大]

実数 c に対して、数列 $\{a_n\}$ を $a_1=c, a_{n+1}=a_n-\frac{1}{2}|a_n|+1 \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$ によって定める。

- (1) $c\geq 0$ とする。このとき、すべての n に対して $a_n\geq 0$ が成り立つことを示せ。さらに、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) $c< 0$ とする。このとき、すべての n に対して $a_n< 0$ が成り立つような実数 c の値の範囲を求めよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ が収束するような実数 c の値の範囲を求めよ。

2[2017 千葉大]

数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1=2, a_{n+1}=1+\frac{1}{1-\sum_{k=1}^n\frac{1}{a_k}} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

- (1) a_5 を求めよ。
- (2) a_{n+1} を a_n の式で表せ。
- (3) 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{a_k}$ が収束することを示し、その和を求めよ。

3[2015 九州大]

数列 $\{x_n\}$ の第 n 項を $x_n=r^{n-1}$ で定める。このとき、正の実数 x に対して定義された関数 $f(x)=x^{-\alpha}$ を用いて、2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を、それぞれ $a_n=f(x_n)(x_{n+1}-x_n)$ と $b_n=f(x_{n+1})(x_{n+1}-x_n)$ で定める。ただし、 α は正の定数、 r は1より大きい実数とする。

- (1) α の値に応じて級数 $a(r)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の収束、発散を調べ、収束するときは和を求めよ。
- (2) α の値に応じて級数 $b(r)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ の収束、発散を調べ、収束するときは和を求めよ。
- (3) 極限 $\lim_{r\rightarrow 1+0}a(r)$ と $\lim_{r\rightarrow 1+0}b(r)$ のそれぞれについて、極限が有限な値である場合、その値を求めよ。

4[2015 九州大]

チームAとBが複数回試合を行って優勝チームを決めるものとする。ただし、いずれの試合においても、引き分けはないものとし、チームAが勝つ確率は $q \ (0<q<1)$ であり、各試合の勝敗は互いに独立に決まるとする。このとき、次の2種類のルールを考える。

- ルール1：最大3回試合を行い、先に2勝したチームを優勝とする。
- ルール2：どちらか一方が2連勝するまで試合を繰り返し、2連勝したチームを優勝とする。

- (1) ルール1を採用した場合に、チームAが優勝する確率 $P_1(q)$ を q で表せ。
- (2) ルール2を採用した場合に、チームAが優勝する確率 $P_2(q)$ を q で表せ。
- (3) $P_1(q)\geq P_2(q)$ となる条件を求めよ。

5[2015 九州大]

C_1, C_2 をそれぞれ次の式で与えられる放物線の一部とする。

$$C_1: y=-x^2+2x, \ 0\leq x\leq 2$$

$$C_2: y=-x^2-2x, \ -2\leq x\leq 0$$

- また、 a を実数とし、直線 $y=a(x+4)$ を ℓ とする。
- (1) 直線 ℓ と C_1 が異なる2つの共有点をもつための a の値の範囲を求めよ。
- 以下、 a が(1)の条件を満たすとする。このとき、 ℓ と C_1 で囲まれた領域の面積を S_1 、 x 軸と C_2 で囲まれた領域で ℓ の下側にある部分の面積を S_2 とする。
- (2) S_1 を a を用いて表せ。
 - (3) $S_1=S_2$ を満たす実数 a が $0<a<\frac{1}{5}$ の範囲に存在することを示せ。

6[2014 東北大]

n を自然数とする。次の連立不等式が表す xy 平面の領域を D_n とする。

$$\begin{cases} 0\leq x\leq 3n \\ 0\leq 3y\leq 2x+3 \end{cases}$$

D_n に含まれ、 x 座標、 y 座標ともに整数である点 (x, y) の個数を a_n とする。

- (1) a_1 を求めよ。

- (2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ。
- (3) a_n を求めよ。
- (4) D_n の面積を S_n とする。極限値 $\lim_{n\rightarrow \infty}n\left(\frac{a_n}{S_n}-1\right)$ を求めよ。

7[2014 名古屋大]

xy 平面の $y\geq 0$ の部分にあり、 x 軸に接する円の列 $C_1, C_2, C_3, \cdots$ を次のように定める。

- ・ C_1 と C_2 は半径1の円で、互いに外接する。
- ・ 正の整数 n に対し、 C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し、 C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある。

円 C_n の半径を r_n とする。

- (1) 等式 $\frac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}=\frac{1}{\sqrt{r_n}}+\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ。
- (2) すべての正の整数 n に対して $\frac{1}{\sqrt{r_n}}=s\alpha^n+t\beta^n$ が成り立つように、 n によらない定数 α, β, s, t の値を1組与えよ。
- (3) $n\rightarrow \infty$ のとき数列 $\left\{\frac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め、そのときの極限値を求めよ。

8[2014 千葉大]

$f(x)=x(x^2+1)$ とする。数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。
 $a_1=1$ とする。また $n\geq 2$ のとき、曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a_{n-1}, f(a_{n-1}))$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_n とする。

- (1) a_n を a_{n-1} を用いて表せ。
- (2) $\lim_{n\rightarrow \infty}a_n=0$ を示せ。

9[2013 東北大]

p は $0<p<1$ を満たす実数とする。数列 $\{a_n\}$ は、 $a_1=1$ および関係式 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_{n+1}}+p \ (n=1, 2, 3, \cdots)$ を満たすものとする。

- (1) $n\geq 2$ のとき、 a_n を求めよ。
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty}na_n=20$ であるとき、 p の値を求めよ。

10[2013 九州大]

α を $0\leq \alpha\leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とし、数列 $\{\theta_n\}$ を次式により定める。

$$\theta_1=0, \ \theta_{n+1}=\begin{cases} \theta_n+\alpha & \left(\theta_n\leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき} \right) \\ \theta_n-\alpha & \left(\theta_n> \frac{\pi}{2} \text{ のとき} \right) \end{cases} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

さらに数列 $\{x_n\}$ を次式により定める。

$$x_1=0, \ x_{n+1}=x_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sin \theta_{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \cdots)$$

- (1) x_3 が最大となる α を求めよ。
- (2) $\alpha=\frac{\pi}{4}$ のとき、極限値 $\lim_{n\rightarrow \infty}x_n$ を求めよ。
- (3) 極限値 $\lim_{n\rightarrow \infty}x_n$ が最大となる α と、その極限値を求めよ。

11[2012 九州大]

p と q はともに整数であるとする。2 次方程式 $x^2+px+q=0$ が実数解 α, β をもち、条件 $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)\neq 0$ を満たしているとする。このとき、数列 $\{a_n\}$ を $a_n=(\alpha^n-1)(\beta^n-1) \ (n=1, 2, \cdots)$ によって定義する。

(1) a_1, a_2, a_3 は整数であることを示せ。

(2) $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$ のとき、極限値 $\lim_{n\rightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ は整数であることを示せ。

(3) $\lim_{n\rightarrow\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるとき、 p と q の値をすべて求めよ。ただし、 $\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

12[2012 東北大]

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1, a_{n+1}=\sqrt{\frac{3a_n+4}{2a_n+3}} \ (n=1, 2, 3, \cdots)$ で定める。

(1) $n\geq 2$ のとき、 $a_n>1$ となることを示せ。

(2) $\alpha^2=\frac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$ を満たす正の実数 α を求めよ。

(3) すべての自然数 n に対して $a_n<\alpha$ となることを示せ。

(4) $0<r<1$ を満たすある実数 r に対して、不等式 $\frac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n}\leq r \ (n=1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つことを示せ。更に、極限 $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n$ を求めよ。

13[2011 九州大]

(1) $n\geq 6$ かつ $3\leq k\leq n-3$ のとき、 ${}_nC_k\geq {}_nC_3$ であることを示せ。

(2) $n\geq 6$ のとき、次の不等式を示せ。

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{{}_nC_k}\leq \frac{2}{n}+\frac{10n-38}{n(n-1)(n-2)}$$

(3) $\lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k+1}{{}_nC_k}$ を求めよ。

14[2011 九州大]

$a>0, b>0, 0<\alpha<1, 0<\beta<1$ として、次の問いに答えよ。

(1) 初項 $a_1=a$ と漸化式 $a_{n+1}=\alpha a_n \ (n=1, 2, 3, \cdots)$ で定義された数列 $\{a_n\}$ がある。このとき、 $x_n=\log_{10}a_n \ (n=1, 2, 3, \cdots)$ により定まる数列 $\{x_n\}$ の一般項を n, α, a を用いて表せ。

(2) 初項 $b_1=b$ と漸化式 $b_{n+1}=\beta b_n^2 \ (n=1, 2, 3, \cdots)$ で定義された数列 $\{b_n\}$ がある。このとき、 $y_n=\log_{10}b_n \ (n=1, 2, 3, \cdots)$ により定まる数列 $\{y_n\}$ の一般項を n, β, b を用いて表せ。

(3) $a=b=1$ のとき、 $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}=0$ を証明せよ。

15[2011 北海道大]

p を自然数とする。数列 $\{x_n\}$ を漸化式 $x_1=\cos\left(\frac{2\pi}{p}\right), x_{n+1}=2(x_n)^2-1 \ (n=1, 2, 3, \cdots)$ で定める。

(1) x_n を求めよ。

(2) l を自然数とする。 $p=2^l$ および $p=3\times 2^l$ のそれぞれの場合について $\lim_{n\rightarrow\infty}x_n$ を求めよ。

(3) l を自然数とする。 $p=5\times 2^l$ のとき、数列 $\{x_n\}$ は発散することを示せ。

16[2010 東北大]

b は $|b|\geq 3$ を満たす整数とする。2 次方程式 $x^2+bx+1=0$ の解を α, β とする。

(1) 0 以上のすべての整数 n に対して $\alpha^n+\beta^n$ は整数であることを示せ。

(2) $|\alpha|>|\beta|$ とする。 α^n から最も近い整数と α^n との差を d_n とする。極限 $\lim_{n\rightarrow\infty}d_n$ を求めよ。

17[2010 九州大]

xy 平面上に曲線 $y=-\frac{1}{x^2}$ をかき、この曲線の第 1 象限内の部分を C_1 、第 2 象限内の部分を C_2 とよぶ。 C_1 上の点 $P_1\left(a, \frac{1}{a^2}\right)$ から C_2 に向けて接線を引き、 C_2 との接点を Q_1 とする。次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き、 C_1 との接点を P_2 とする。次に点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き、接点を Q_2 とする。以下同様に続けて、 C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める。

(1) 点 Q_1 の座標を求めよ。

(2) 三角形 $P_1Q_1P_2$ の面積 S_1 を求めよ。

(3) 三角形 $P_nQ_nP_{n+1} \ (n=1, 2, 3, \cdots)$ の面積 S_n を求めよ。

(4) 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ の和を求めよ。

18[2010 北海道大]

正の実数 r と $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲の実数 θ に対して $a_0=r\cos\theta, b_0=r$ とおく。 $a_n, b_n \ (n=1, 2, 3, \cdots)$ を漸化式 $a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_n=\sqrt{a_nb_{n-1}}$ により定める。

(1) $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$ を θ で表せ。

(2) $\frac{a_n}{b_n}$ を n と θ で表せ。

(3) $\theta\neq 0$ のとき $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n=\lim_{n\rightarrow\infty}b_n=\frac{r\sin\theta}{\theta}$ を示せ。

19[2010 東北大]

$f(x)=\sqrt{x+2}$ として、数列 $x_0, x_1, x_2, \cdots$ を $x_0=0, x_n=f(x_{n-1}) \ (n=1, 2, 3, \cdots)$ で定義する。以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対して $2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<x_n<x_{n+1}<2$ が成り立つことを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して $x_n<2-\left(\frac{1}{4}\right)^n$ が成り立つことを示せ。

(3) すべての自然数 n に対して $x_n<2-\alpha^n$ を満たす正の定数 α のうち、最大のものを求めよ。

20[2010 北海道大]

1 辺の長さが a の正三角形 D_0 から出発して、多角形 $D_1, D_2, \cdots, D_n, \cdots$ を次のように定める。

(i) AB を D_{n-1} の 1 辺とする。辺 AB を 3 等分し、その分点を A に近い方から P, Q とする。

(ii) PQ を 1 辺とする正三角形 PQR を D_{n-1} の外側に作る。

(iii) 辺 AB を折れ線 APRQB で置き換える。

D_{n-1} のすべての辺に対して (i) ~ (iii) の操作を行って得られる多角形を D_n とする。

(1) D_n の周の長さ L_n を a と n で表せ。

(2) D_n の面積 S_n を a と n で表せ。

(3) $\lim_{n\rightarrow\infty}S_n$ を求めよ。

[21][2010 九州大]

鋭角三角形 ABC において、 $\vec{a}=\overrightarrow{CA}$ 、 $\vec{b}=\overrightarrow{CB}$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 線分 AC を 1 : 2 に内分する点を P、線分 BC を 2 : 3 に内分する点を Q とする。ここで線分 AC の長さを |AC| で表すとして、|AC|=12 および |BC|=5√5 とする。このとき、|AQ|>|BP| であることを示せ。
- (2) n を正の整数、 r を $0<r<1$ をみたす実数とする。線分 AC を $(1-r):r$ に内分する点を E、線分 BC を $(1-r^n):r^n$ に内分する点を F とし、線分 AF と線分 BE の交点を R とする。 $\overrightarrow{CR}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 n 、 r を用いて表せ。
- (3) (2)において、 n を固定して $r\rightarrow 1$ としたとき、交点 R は辺 AB 上のある点 S に近づく。このとき、|AS| : |SB| を求めよ。

[22][2009 北海道大]

直角三角形 △ABC において ∠B は直角であるとし、辺 AC の長さを α とする。辺 AC を n 等分し、その分点を A に近い方から順に D₁、D₂、D₃、……、D _{$n-1$} とおく。 $1\leq k\leq n-1$ に対し、線分 BD _{k} の長さを L_k とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $S_n=\sum_{k=1}^{n-1}(L_k)^2$ を α と n で表せ。
- (2) $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{S_n}{n}$ を α で表せ。

[23][2009 北海道大]

$a_1>1$ とする。数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2a_n} \quad (n\geq 1)$$

によって定める。 k を自然数として、次の問いに答えよ。

- (1) a_{2k+1} を a_{2k-1} で表せ。
- (2) $1<a_{2k+1}<a_{2k-1}$ を示せ。
- (3) $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n=1$ を示せ。

[24][2008 東北大]

n を自然数とする。平面上の曲線 $C:y=x^2-n$ と x 軸が囲む領域内にあり、 x 座標と y 座標の値がともに整数であるような点の総数を a_n とおく。ただし、曲線 C 上の点お

よび x 軸上の点も含むとする。 $n^{\frac{1}{2}}$ を超えない最大の整数を m_n とおくと、次の問いに答えよ。

- (1) a_n を n と m_n で表せ。
- (2) $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}}$ を求めよ。

[25][2008 東北大]

n を 2 以上の自然数とする。平面上の △OA₁A₂ は ∠OA₂A₁=90°、OA₁=1、A₁A₂= $\frac{1}{\sqrt{n}}$ を満たすとする。A₂ から OA₁ へ垂線を下ろし、交点を A₃ とする。A₃ から OA₂ へ垂線を下ろし、交点を A₄ とする。以下同様に、 $k=4, 5, \dots$ について、A _{k} から OA _{$k-1$} へ垂線を下ろし、交点を A _{$k+1$} とし、順番に A₅、A₆、……を定める。 $\vec{h}_k=\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ とおくと、以下の問いに答えよ。

- (1) $k=1, 2, \dots$ のとき、ベクトル $\vec{h}_k$ と $\vec{h}_{k+1}$ の内積 $\vec{h}_k\cdot\vec{h}_{k+1}$ を n と k で表せ。
- (2) $S_n=\sum_{k=1}^n\vec{h}_k\cdot\vec{h}_{k+1}$ とおくと、極限値 $\lim_{n\rightarrow\infty}S_n$ を求めよ。ここで、自然対数の底 e について、 $e=\lim_{n\rightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ であることを用いてもよい。

[26][2008 名古屋大]

△ABC で辺 AC を $s:(1-s)$ に内分する点を P、辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q、線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。このとき、△APR の面積=2×(△BQR の面積) が成り立っているとする。

- (1) s を t を用いて表せ。
- (2) 極限 $\lim_{t\rightarrow+0}\frac{s}{t}$ を求めよ。ただし、 t が正の範囲で 0 に限りなく近づくとき、 $t\rightarrow+0$ と表す。

[27][2008 東京農工大]

極限値 $L=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{x\tan x}{\cos x-1}$ を求めよ。

[28][2008 東北大]

$k>1$ として、 $f(x)=x^2+2kx$ とおく。曲線 $y=f(x)$ と円 $C:x^2+y^2=1$ の 2 つの交点のうちで、第 1 象限にあるものを P とし、第 3 象限にあるものを Q とする。点 O (0, 0)、A (1, 0)、B (−1, 0) に対して、 $\alpha=\angle AOP$ 、 $\beta=\angle BOQ$ とおくと、以下の問いに答えよ。

(1) k を α で表せ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と円 C で囲まれる 2 つの図形のうちで、 $y=f(x)$ の上側にあるものの面積 $S(k)$ を α と β で表せ。

(3) $\lim_{k\rightarrow\infty}S(k)$ を求めよ。

[29][2006 九州大]

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=1$ 、 $a_{n+1}=\frac{2a_n}{5a_n+c}$ ($n=1, 2, \dots$) と定める。ただし、 c は $0\leq c<2$ を満たす定数とする。

- (1) $b_n=\frac{1}{a_n}$ とおくと、 $b_{n+1}-pb_n=q$ ($n=1, 2, \dots$) となる定数 p 、 q を c の式で表せ。
- (2) a_n を n と c の式で表せ。
- (3) $\lim_{n\rightarrow\infty}a_n$ を c の式で表せ。

[30][2005 東北大]

1 から n までの数字を 1 つずつ書いた n 枚のカードが箱に入っている。この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して数字を記録し、箱に戻すという操作を繰り返す。ただし、 k 回目の操作で直前のカードと同じ数字か直前のカードよりも小さい数字のカードを取り出した場合に、 k を得点として終了する。

- (1) $2\leq k\leq n+1$ を満たす自然数 k について、得点が k となる確率を求めよ。
- (2) 得点の期待値を n で表した式を $f(n)$ とするとき、 $f(n)$ および極限値 $\lim_{n\rightarrow\infty}f(n)$ を求めよ。

[31][2005 東北大]

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=\frac{3n-1}{3n+5}a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

このとき、一般項 a_n と級数の和 $S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ を求めよ。

[32][2005 九州大]

関数 $f(x)=x^2+2px+q$ を用いて、数列 $\{a_n\}$ を $a_1=0$ 、 $a_{n+1}=-rf'(a_n)+a_n$ ($n=1, 2, \dots$)

と定める。ただし、 p 、 q 、 r は実数で、 $p\neq 0$ かつ $0<r<\frac{1}{2}$ とする。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ を求めよ。
- (3) m を $f(x)$ の最小値とする。任意の n について $|f(a_{n+1})-m|<|f(a_n)-m|$ が成り立つことを示せ。

[33][2003 名古屋大]

サイコロを n 回投げて、3 の倍数が k 回出る確率を $P_n(k)$ とする。各 n について、 $P_n(k)$ を最大にする k を $N(n)$ とする。ただし、このような k が複数あるときは、最も大きいものを $N(n)$ とする。

- (1) $\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき、 $\frac{N(n)}{n}$ を最小にする n と、そのときの $\frac{N(n)}{n}$ の値を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{n}$ を求めよ。

[34][2003 東北大]

関数 $f(x)=4x-x^2$ に対し、数列 $\{a_n\}$ を

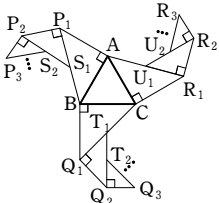
$$a_1=c, \ a_{n+1}=\sqrt{f(a_n)} \ (n=1, \ 2, \ 3, \ \cdots)$$

で与える。ただし、 c は $0 < c < 2$ を満たす定数である。

- (1) $a_n < 2, \ a_n < a_{n+1} \ (n=1, \ 2, \ 3, \ \cdots)$ を示せ。
- (2) $2-a_{n+1} < \frac{2-c}{2}(2-a_n) \ (n=1, \ 2, \ 3, \ \cdots)$ を示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

[35][2003 千葉大]

△ABC は 1 辺 1 の正三角形である。辺 AB, BC, CA を 1 辺として、それらに垂直な辺をもつ直角二等辺三角形 BAP₁, CBQ₁, ACR₁ を定める。このときできた全体の図形を F₁ とする。また、BP₁, CQ₁, AR₁ の中点をそれぞれ S₁, T₁, U₁ として
∠S₁P₁P₂=∠T₁Q₁Q₂=∠U₁R₁R₂=90° となる直角二等辺三角形 S₁P₁P₂, T₁Q₁Q₂, U₁R₁R₂ を図のように定める。同様にして、△S₂P₂P₃, △S₃P₃P₄, …… , △T₂Q₂Q₃, △T₃Q₃Q₄, …… , △U₂R₂R₃, △U₃R₃R₄, …… を図のように定める。P_n, Q_n, R_n を定めてできた全体の図形を F_n とする。F_n の周りの長さを l_n , F_n の面積を S_n とする。次の問いに答えよ。



- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n$ を求めよ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

[36][2003 九州大]

a を正の実数、 n を自然数とすると、 $x^n=a$ となる正の数 x がただ 1 つ定まる。これを $a^{\frac{1}{n}}$ と書く。更に、任意の実数 p に対して a^p が定義できて、 $a > b > 0, \ p > 0$ ならば、 $a^p > b^p$ が成立する。また、 $a^{-p} = \left(\frac{1}{a}\right)^p = \frac{1}{a^p}$ である。これらのことを知って、次の問いに答えよ。

- (1) $a > 1$ のとき、 $a^{\frac{1}{n}} = 1 + h_n, \ h_n > 0$ とおける。このとき、 $h_n < \frac{a}{n}$ を示せ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ を証明せよ。
- (3) $\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1$ であることを証明せよ。ただし、必要なら、 $0 < x < 1$ のとき $\frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}$ となる自然数 n が存在することを用いてよい。(注： $x \longrightarrow +0$ は x が 0 に正の方向から近づくことを示す)

[37][2002 千葉大]

無限数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=c, \ a_{n+1}=\frac{a_n^2-1}{n} \ (n \geq 1)$$

で定める。ここで、 c は定数とする。

- (1) $c=2$ のとき、一般項 a_n を求めよ。
- (2) $c \geq 2$ ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ となることを示せ。
- (3) $c = \sqrt{2}$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ の値を求めよ。

[38][2001 九州大]

サイコロを n 回振って、出た目を小さい方から順に並べ、第 i 番目を $X_i \ (i=1, \ \cdots, \ n)$ とする。

- (1) $n=7$ のとき、3 の目が 3 回、5 の目が 2 回出たとする。このとき、 X_4 のとりうる値をすべて求めよ。
- (2) 一般の n に対して、 $X_1=2$ となる確率 $P(X_1=2)$ を求めよ。
- (3) 一般の n に対して、 X_1 の期待値 $E(X_1)$ を求めよ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \{E(X_1)-1\}$ を求めよ。ここで、 $\log$ は自然対数を表す。
- (5) 一般の n に対して、期待値 $E(X_1+X_n)$ を求めよ。

[39][2001 千葉大]

数列 $a_1, \ a_2, \ a_3, \ \cdots$ を次のように定義する。

$$a_n=\tan \frac{\pi}{2^{n+1}} \ (n=1, \ 2, \ 3, \ \cdots)$$

- (1) すべての自然数 n に対して $a_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n}$ が成り立つことを示せ。
- (2) 次の無限級数の和を求めよ。
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

[40][2000 九州大]

初項 $a_1=1$ とし、 $n \geq 2$ に対し、

$$a_n=\begin{cases} a_{n-1}-\frac{1}{n} \ (a_{n-1} \geq 0 \text{ のとき}) \\ a_{n-1}+\frac{1}{n} \ (a_{n-1} < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ について、以下の問いに答えよ。

- (1) $a_2, \ a_3, \ a_4, \ a_5$ を求めよ。
- (2) すべての自然数 n に対し、 $|a_n| \leq \frac{1}{n}$ が成り立つことを示し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。
- (3) $n \geq 2$ のとき、連続する 3 項 $a_n, \ a_{n+1}, \ a_{n+2}$ は、同時に正、または同時に負にはならないことを証明せよ。

[41][1999 名古屋大]

A 君はグーのカードを 1 枚、チョキのカードを 4 枚持っている。B 君はパーのカードを 1 枚、チョキのカードを 4 枚持っている。2 人はカードを無作為に 1 枚ずつ出して、いずれかが勝つまでじゃんけんを続ける。以下の問いに答えよ。

- (1) 1 度出したカードを手に戻さない場合、B 君が勝つ確率を求めよ。
- (2) 出したカードを手に戻す場合、 n 回目に B 君が勝つ確率 p_n を求めよ。
- (3) 出したカードを手に戻す場合、 n 回目までに B 君が勝つ確率 P_n を求めよ。
また、 n を限りなく大きくしたら、 P_n はいくらに近づくか。
- (4) 出したカードを手に戻しながら、B 君の勝ち負けにかかわらず A 君が 2 回勝つまでじゃんけんを続けた場合、 n 回目に A 君が 2 勝目をあげる確率を求めよ。ただし、 $n \geq 2$ である。

[42][1999 九州大]

関数 $f(x)=1-x^2$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(a)=a$ を満たす正の実数 a を求めよ。
- (2) a を (1) で求めた実数とする。
$$x \geq \frac{1}{2} \text{ ならば、} |f(x)-f(a)| \geq \frac{\sqrt{5}}{2} |x-a|$$
となることを示せ。
- (3) a を (1) で求めた実数とする。
$$\frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1 \text{ として、} x_{n+1}=f(x_n), \ n=1, \ 2, \ 3, \ \cdots$$
で決まる数列 $\{x_n\}$ を考える。すべての n に対して $\frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$ が成り立つならば、 $x_1=a$ であることを示せ。

[43][1999 東北大]

- 正 n 角形 P_n を次のようにして定義する.
- (A) P_3 は面積が 1 の正三角形である.
- (B) P_n と同じ面積をもつ円を D_n とする. P_{n+1} は D_n と周の長さが等しい正 $n+1$ 角形である.
- $n=3, 4, 5, \dots$ について P_n の面積を a_n としたとき, 次の各問いに答えよ.
- (1) $n \geq 4$ について $\frac{a_{n-1}}{a_n}$ を n を用いて表せ.
- (2) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} - \frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n} \right)$ を求めよ.

[44][1999 東京農工大]

- O を原点とする xy 平面の第 1 象限に $OP_1=1$ を満たす点 $P_1(x_1, y_1)$ をとる. このとき, 線分 OP_1 と x 軸とのなす角を $\theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ とする. 点 $(0, x_1)$ を中心とする半径 x_1 の円と, 線分 OP_1 との交点を $P_2(x_2, y_2) \ (x_2 > 0)$ とする. 次に, 点 $(0, x_2)$ を中心とする半径 x_2 の円と, 線分 OP_1 との交点を $P_3(x_3, y_3) \ (x_3 > 0)$ とする. 以下同様にして, 点 $P_n(x_n, y_n) \ (x_n > 0), \ (n=1, 2, \dots)$ を定める. このとき, 次の各問いに答えよ.
- (1) x_2 を θ を用いて表せ. ただし, 答のみでよい.
- (2) x_n を θ を用いて表せ.
- (3) $\theta \asymp \frac{\pi}{4}$ のとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k$ を求めよ.
- (4) (3) で得られた値を $f(\theta)$ とおく. $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{4} + 0} f(\theta)$ および $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} f(\theta)$ を求め,

$f(\theta)=1$ を満たす θ が区間 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の中に少なくとも 1 つあることを示せ.

[45][1998 東京農工大]

- 次のように定義された数列を $\{a_n\}$ とする.
- $$a_1=r^2, a_2=1, 2a_n=(r+3)a_{n-1}-(r+1)a_{n-2} \ (n \geq 3)$$
- (1) $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと, b_n を n と r を用いて表せ.
- (2) a_n を求めよ.
- (3) 数列 $\{a_n\}$ が収束するような r の範囲およびそのときの極限値を求めよ.

[46][1998 東北大]

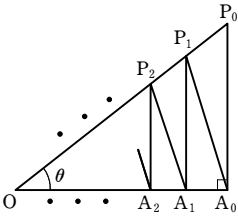
- ある 1 面だけに印のついた立方体が水平な平面に置かれている. 平面に接する面 (底面) の 4 辺のうち 1 辺を選んでこの辺を軸にしてこの立方体を横に倒す, という操作を行う. ただし, どの辺が選ばれるかは同様に確からしいとし, 印のついた面が最初は上面にあるとする. この操作を n 回繰り返して行ったとき, 印のついた面が立方体の側面にくる確率を a_n , 底面にくる確率を b_n とおく.
- (1) a_2 を求めよ.
- (2) a_{n+1} と a_n の関係式を導け.
- (3) b_n を n の式で表し, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ.

[47][1998 筑波大]

直角三角形 A_0P_0O の斜辺 OP_0 上に点の列 $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ を, 辺 OA_0 上に点の列 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ を, それぞれ次のように定める. まず, $OP_1=OA_0$ とする. 次に点 P_1 から OA_0 に下した垂線の足を A_1 とする. 次に $OP_2=OA_1$ とし, 点 P_2 から OA_0 に下した垂線の足を A_2 とする. 以下, この操作をくり返す.

$\angle P_0OA_0=\theta, OA_0=a$ とし, $\triangle A_{n-1}P_{n-1}P_n$ の面積を S_n とする.

- $S(\theta)=S_1+S_2+\dots+S_n+\dots$ とするとき, 次の問いに答えよ.
- (1) S_1 を a と θ で表せ.
- (2) $S(\theta)$ を a と θ で表せ.
- (3) $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta}$ を求めよ.



[48][1997 北海道大]

- p を 0 でない実数とする. 数列 $a_1, a_2, \dots$ を次のように定義する.
- $$a_1=1, a_{n+1}=pa_n+p^{-n} \ (n=1, 2, \dots)$$
- (1) $|p|=1$ のとき, a_n を求めよ.
- (2) $|p| \neq 1$ のとき, a_n を求めよ.
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ.

[49][1997 東京農工大]

- 関係式 $a_1=1, a_2=2, a_n=\sqrt{a_{n-1}a_{n-2}} \ (n=3, 4, \dots)$ で定められた数列 $\{a_n\}$ がある.
- (1) $b_n=\log a_n$ とするとき, b_{n+2} と b_{n+1}, b_n の間に成り立つ関係式を求めよ.
- (2) $c_n=b_{n+1}-b_n$ とするとき, c_n の値を求めよ.
- (3) b_n の値を求めよ.
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ の値を求めよ.

[50][1997 千葉大]

- ひし形 ABCD において, 対角線 AC の長さを 3, $\angle DAC=30^\circ$ とする. このひし形の内部にあり, 中心を線分 AC 上にもつ円 $K_0, K_1, K_2, \dots$ が次の条件を満たすとする.
- (i) 円 K_0 は辺 AB, AD に接する.
- (ii) 円 K_1 は辺 CB, CD に接し, K_0 と外接する.
- (iii) 一般に円 K_n は辺 CB, CD に接し, K_{n-1} に外接する $(n=2, 3, 4, \dots)$.
- (iv) 円 K_n の中心を O_n と書くとき, $CO_n > CO_{n+1}$ とする $(n=0, 1, 2, \dots)$.

- 円 K_n の半径を r_n , 面積を $S_n \ (n=0, 1, 2, \dots)$ とするとき
- (1) r_0, r_1 の間に成り立つ関係式と, r_0 のとりうる値の範囲を求めよ.
- (2) $n \geq 1$ のとき, S_{n+1} と S_n との間に成り立つ関係式を求めよ.
- (3) $\sum_{n=0}^{\infty} S_n$ を最小にする r_0 の値を求めよ.

[51][1997 名古屋大]

- 正数からなる数列 $\{a_n\}$ が, 条件 $\sum_{k=1}^n (a_k)^2 = n^2 + 2n$ を満たしているとする. 数列 $\left\{ \frac{a_1 + \dots + a_n}{n^r} \right\}$ が収束する実数 r の範囲を求めよ. また収束する場合, その極限値を求めよ.

[52][1996 北海道大]

- (1) 数学的帰納法により不等式 $\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} + 1$ を証明せよ. ただし, $n=1, 2, 3, \dots$ とする.
- (2) 次の命題は真か偽か. 真ならば証明し, 偽ならばその例をあげ理由を説明せよ.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$ ならば数列 $\{a_n\}$ は収束する.

[53][1996 東京農工大]

自然数 n に対して $S_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2} \right)^k \cos k\pi$ とおく. このとき, S_n および $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ.

[54][1996 九州大]

- 0 と 1 を有限個並べたものを語ということにする. 語の例としては 0, 010, 00101, 100110 などがある. いま, 2 つの語 $A=1, B=10$ をもとにして $C_1=A, C_2=B, C_n=C_{n-2}C_{n-1}C_{n-2}, \ (n \geq 3)$ のように定める. 例えば, $C_3=1101$ である.
- 次の問いに答えよ.
- (1) $n \geq 3$ のとき, 語 C_n に対して, 最初, または最後の数字を 1 個か 2 個取りさると, 残りは同じ語が循環して現れている. このことを数学的帰納法により示せ.
- (2) 語 C_n に現れる 0 の個数を a_n とし, 1 の個数を b_n とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ を求めよ.

55 [1996 筑波大]

n, m は2以上の自然数, a, b, c, d は正の定数とする.

- (1) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$ を求めよ.
- (2) 等式 $X - Y = \frac{X^n - Y^n}{P(X, Y)}$ を満たす X, Y の多項式 $P(X, Y)$ を求めよ.
- (3) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{x^n + ax^{n-1} + b} - x)$ を求めよ.
- (4) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{x^n + ax^{n-1} + b} - \sqrt[m]{x^m + cx^{m-1} + d})$ を求めよ.